OSMANIA UNIVERSITY

# جبر و مقابلہ

حصۂ اول

برائے

انٹرمیڈیٹ

سلسلۂ نصابیاتِ علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نشان ۶

# جبر و مقابلہ

## حصۂ اوّل

## ALGEBRA

برائے انٹرمیڈیٹ

بربنائے الجبرا ہال اینڈ نائٹ

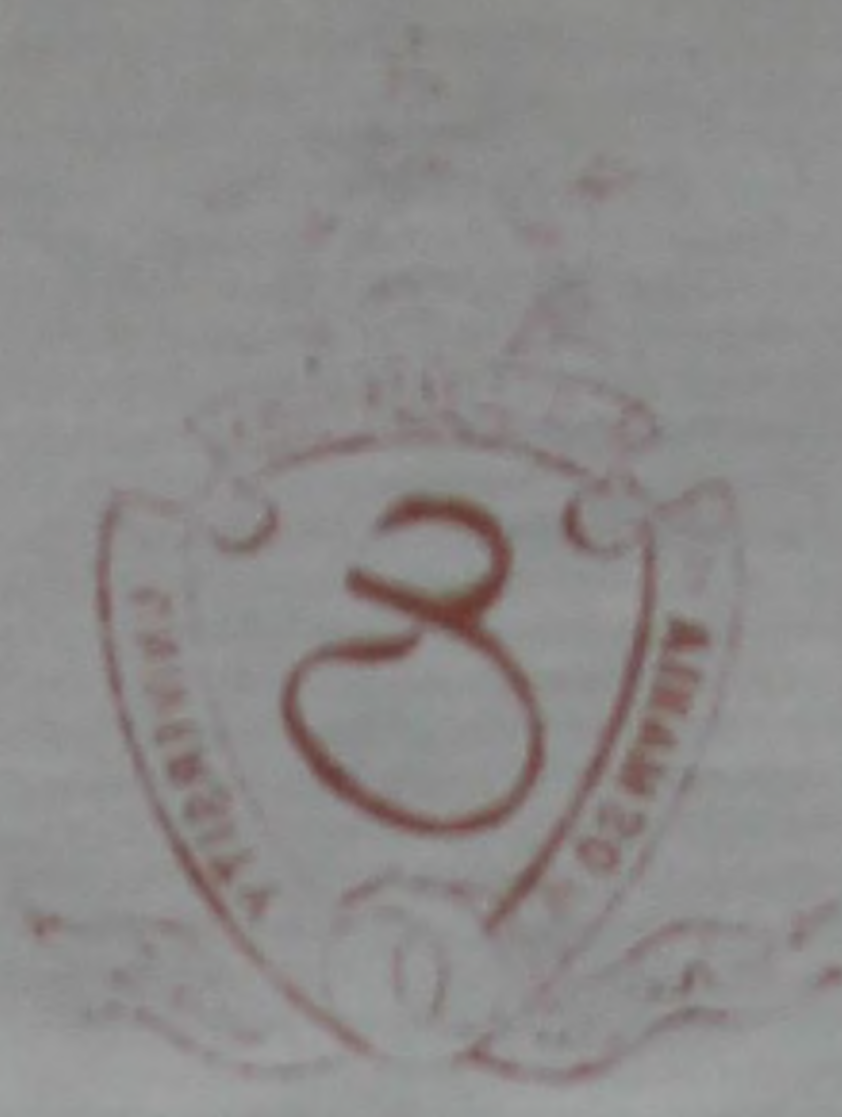
مرتبۂ

**قاضی محمد حسین صاحب مرحوم**

ایم۔اے،

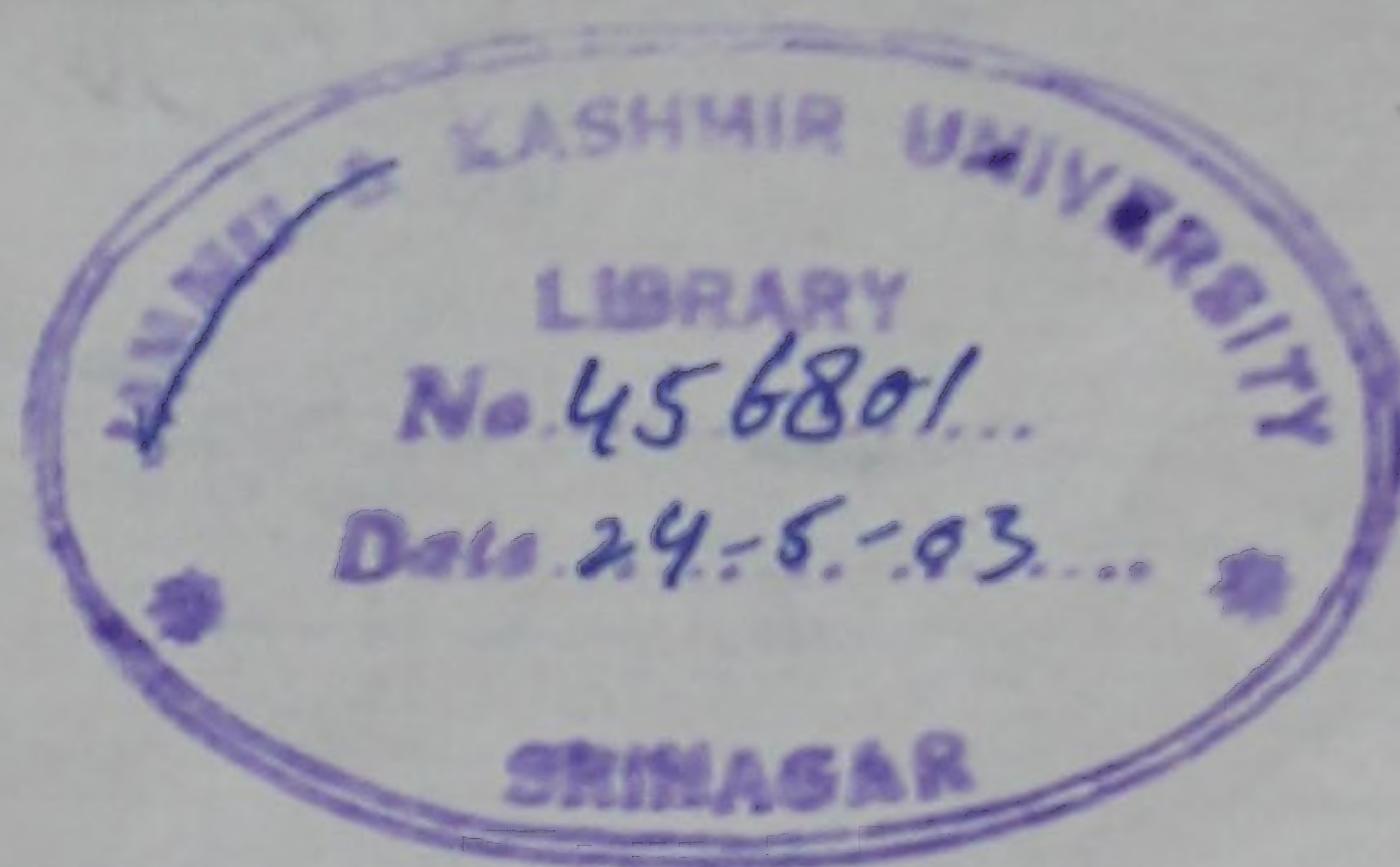
سابق صدر شعبۂ ریاضیات و نائب معین امیر جامعۂ عثمانیہ

طبع چہارم

۱۳۶۷ھ م ۱۳۵۷ف م ۱۹۴۸ء

مطبوعۂ

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

طبع چہارم

تعداد طبع (۱۰۰۰)

# دیباچہ

## (طبعِ اوّل)

حسبِ ہدایات ذیلی مجلس ریاضیات، **جبر و مقابلہ حصّہ اوّل** کو جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لیے بر بنائے **الجبرا ہال اینڈ نائٹ** تالیف کیا گیا ہے، اگرچہ "بر بناء" کی قید اکثر تکلیف دہ اور پریشان کن ثابت ہوئی۔ تاہم جس قدر ممکن تھا اس امر کو پیشِ نظر رکھ کر اس کتاب کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ ترتیبِ مضامین تقریباً وہی ہے جو **ہال اینڈ نائٹ** میں ہے، صرف سلسلۂ ہندسیہ اور سلسلۂ ثنائی کی بحث میں سلسلوں کے استدقاق کے متعلق چند مسائل کا اضافہ کر دیا گیا ہے جن کے بغیر لامتناہی سلسلوں کے مجموعہ کی تعریف محض ناممکن ہے۔

اس تالیف میں خاص طور پر اس بات کو ملحوظ رکھا گیا ہے کہ جامعہ عثمانیہ کے طلبہ کے لیے ایک عملی کتاب نصاب تیار کی جائے جس میں جملہ نظریات کی توضیح مثالوں سے ہو، طلبہ اکثر نظریات کو ازبر کر کے امتحانات میں سند حاصل کر لیتے ہیں مگر فی الحقیقت ان میں وہ قوتِ تخیل اور "دماغی تموّج" پیدا نہیں ہوتا جو ریاضیات کے معمولی سے معمولی طالب علم میں ہونا چاہیے۔ اعلیٰ ریاضی کی مختلف شاخوں میں اگر بجائے نظریات کے

ہمارے نصاب اور امتحانات میں عملی مشقوں پر زیادہ زور دیا جائے تو بہتر نتائج پیدا ہو سکتے ہیں، اس نقطۂ خیال سے مشقی اور حل کردہ مثالوں کی ایک کثیر تعداد نظریات کی توضیح کے لیے فراہم کی گئی ہے۔

۱۳۲۸ف

قاضی محمد حسین

# دیباچہ

## (طبع ثانی)

جبر و مقابلہ حصۂ اول کی نظر ثانی مکمل طور پر کی گئی ہے۔ اس کتاب کی طبع اول سے بعض حصے چھوڑ دیے گئے ہیں۔ نیز **ہال اینڈ نائٹ** کے جبر و مقابلہ حصۂ اول سے حتی الامکان مطابقت پیدا کرنے کی کوشش کی گئی ہے باب پنجم کا کچھ حصہ اور باب چہار دہم کا ابتدائی حصہ، جس میں لامتناہی سلسلوں کے استدقاق پر چند آسان مسئلے ثابت کیے گئے ہیں، از سرِ نو لکھا گیا ہے اور ان مسئلوں کی مدد سے مسئلۂ ثنائی کی اُس صورت پر جب کہ قوت نما مثبت صحیح عدد نہ ہو بحث کی گئی ہے۔

اس کتاب کی نظر ثانی میرے مشورہ کے بموجب پروفیسر محمد خواجہ محی الدین صاحب نے کی ہے۔

سنہ ۱۳۴۲ ف

قاضی محمد حسین

# فہرستِ مضامین

## بابِ اوّل

### نسبت

| | صفحہ |
|---|---|
| متوافق اور متبائن مقادیر | ۳ |
| نسبت صغریٰ، نسبت کبریٰ | ۴ |
| $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = \ldots = \left(\frac{پ\,ا^{ن} + ق\,ج^{ن} + ر\,ع^{ن} + \ldots}{پ\,ب^{ن} + ق\,د^{ن} + ر\,ف^{ن} + \ldots}\right)^{\frac{1}{ن}}$ | ۴ |
| کسر $\frac{ا_1 + ا_2 + ا_3 + \ldots + ا_ن}{ب_1 + ب_2 + ب_3 + \ldots + ب_ن}$ کسور $\frac{ا_1}{ب_1}$، $\frac{ا_2}{ب_2}$، ..... $\frac{ا_ن}{ب_ن}$ میں سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ | ۷ |
| ضربِ چلیپائی | ۱۰ |
| درجۂ اول کی تین متجانس مساواتوں کا حاصل استعاد | ۱۳ |
| امثلہ نمبری ۱ | ۱۴ |

## بابِ دُوم

## تناسب



## بابِ سوم

## تغیّر



## بابِ چہارم

## سلسلۂ حسابیہ

## بابِ پنجم

### سلسلۂ ہندسیہ



## بابِ ششم

### سلسلۂ موسیقیہ، اعدادِ طبعیہ

# بابِ ہفتم

## مقادیرِ اصم

## باب ہشتم

## مقادیرِ خیالی

# باب نہم

## مسائل مساوات درجۂ دوم

## باب دہم

## مساواتیں جو مساوات درجۂ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں



## باب یازدہم

## ترتیب و اجتماع

## بابِ دوازدہم

### استقرائے حسابیہ



## بابِ سیزدہم

### مسئلۂ ثنائی

## باب چہارم

## لامتناہی سلسلے مسئلۂ ثنائی کسی قوت نما کیلیے

# باب پانزدہم

## مسئلہ کثیر الارقام



# باب شانزدہم

## لوکارتم

## بابِ ہفدہم

## قوّت نمائی اور لوکارتمی سلسلے



---

# جبر و مقابلہ

## حصّۂ اوّل

## باب اوّل

## نسبت

**۱۔ تعریف۔** **نسبت** سے مراد وہ ربط ہے جو ایک مقدار کو اسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ ہو اور اس ربط کو اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کونسا ضعف، حصّہ یا حصّے ہیں۔

ا اور ب کی نسبت کو بالعموم ا : ب لکھتے ہیں، مقادیر ا اور ب کو ارقام **نسبت** کہتے ہیں۔ پہلی رقم **مقدم نسبت** کہلاتی ہے اور دوسری رقم **موخر نسبت**۔

**۲۔** اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ ا، مقدار ب کا کونسا ضعف یا حصّہ ہے تو ا کو ب پر تقسیم کرنا چاہیے، پس نسبت ا : ب ناپی جا سکتی ہے کسر $\frac{ا}{ب}$ سے اور آئندہ اسی طریق کتابت کو اختیار کرنے میں سہولت ہوگی۔

اگر دو مقداروں کا مقابلہ کرنا ہو تو انہیں ایک ہی اکائی کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے پس دو پونڈ اور ۱۵ شلنگ کی نسبت کا ناپ کسر $\frac{20\times 2}{15}$ یعنی $\frac{8}{3}$ ہے۔

**نوٹ**۔ چونکہ لفظ نسبت سے یہ معنی مفہوم ہوتے ہیں کہ ایک مقدار کتنی دفعہ دوسری مقدار میں شامل ہے اس لیے ہر ایک نسبت مقدار مجرد ہے۔

**۳**۔ چونکہ کسروں کے خواص کے مطابق $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{م ا}}{\text{م ب}}$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نسبت ا : ب نسبت م ا : م ب کے مساوی ہے یعنی اگر کسی نسبت کے مقدم اور موخر دونوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو نسبت کی قیمت میں فرق نہیں آتا۔

۴۔ دو یا دو سے زیادہ نسبتوں کا مقابلہ اُن کی مساوی کسروں کے نسب نماؤں کو مساوی بنانے سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ دو مجوزہ نسبتیں ا : ب اور لا : ما ہیں۔ چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا ما}}{\text{ب ما}}$ اور $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{ب لا}}{\text{ب ما}}$

اس لیے نسبت ا : ب بڑی ہے یا برابر ہے یا چھوٹی ہے نسبت لا : ما سے بموجب اس کے کہ ا ما بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے ب لا سے۔

**۵**۔ دو کسروں کی نسبت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر ہو سکتی ہے پس نسبت

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} : \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کا ناپ کسر $\frac{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}$ یعنی $\frac{\text{ا د}}{\text{ب ج}}$ ہے اور اس لیے نسبت

مذکورہ ا د : ب ج کے مساوی ہے۔

۶۔ اگر کسی نسبت کی ایک یا دونوں رقمیں مقادیر اصم ہوں تو دو ایسے اعداد نہیں مل سکتے جو اس نسبت کو ٹھیک ٹھیک تعبیر کر سکیں۔

مثلاً نسبت $\sqrt{۵} : ۱$ صحیح طور پر دو صحیح عددوں کی رقوم میں بیان نہیں ہوسکتی۔

**تعریف**۔ جب دو مقداروں کو ایک تیسری مقدار پورا پورا تقسیم کردے تو انہیں مقادیر **متوافقہ** کہتے ہیں اور اس تیسری مقدار کو **وفق مشترک** کہتے ہیں اور جب دو مقداروں کا کوئی وفق مشترک نہ ہو تو ان کو **متبائن** کہتے ہیں۔

۷۔ اگرچہ دو ایسے صحیح عدد نہیں معلوم ہوسکتے جو دو مقادیر متبائن کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک بیان کرسکیں، تاہم دو ایسے صحیح عدد دریافت ہوسکتے ہیں جن کی نسبت کا تفاوت نسبت مطلوبہ سے اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔

مثلاً $\frac{\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۲٫۲۳۶۰۶۷۰۰۰۰۰۰۰}{۴} = ۰٫۵۵۹۰۱۶۰۰۰۰۰$

اور اس لئے $\frac{\sqrt{۵}}{۴} > \frac{۵۵۹۰۱۶}{۱۰۰۰۰۰۰}$ اور $< \frac{۵۵۹۰۱۷}{۱۰۰۰۰۰۰}$

پس نسبت $۵۵۹۰۱۶ : ۱۰۰۰۰۰۰$ اور $\sqrt{۵} : ۴$ میں فرق ۰٫۰۰۰۰۰۱ سے کم ہے۔ اگر تعداد اعشاریہ زیادہ لی جائے تو اس سے بھی اچھا تقرب حاصل ہوسکتا ہے۔

۸۔ اگر نسبتوں کے سب مقدموں کو آپس میں ضرب دے کر نیا مقدم بنائیں اور سب موخروں کو ضرب دے کر ایک نیا موخر بنائیں تو جو نسبت اس جدید مقدم کو جدید موخر سے ہوگی اُسے نسبت مؤلّفہ ان نسبتوں کی کہینگے۔

مثال۔ نسبت مؤلفہ تین مفصلہ ذیل نسبتوں کی معلوم کرو۔

$۲ا : ۳ب،\ ۶اب : ۵ج^{۲}،\ ج : ا$

$$\text{نسبت مطلوبہ} = \frac{۲ا}{۳ب} \times \frac{۶اب}{۵ج^{۲}} \times \frac{ج}{ا} = \frac{۴ا}{۵ج}$$

اگر نسبت $ا : ب$ کی تالیف نسبت $ا : ب$ سے کی جائے تو $ا^{۲} : ب^{۲}$ پیدا ہوتی ہے، اسے $ا : ب$ کی **دوہری نسبت** کہتے ہیں۔ اسی طرح سے $ا^{۳} : ب^{۳}$ کو $ا : ب$ کی **تہری نسبت** کہتے ہیں۔ نیز $ا^{\frac{۱}{۲}} : ب^{\frac{۱}{۲}}$، $ا : ب$ کی **جذری نسبت** ہے۔

**مثال** (۱) نسبت ۲ ا : ۳ ب کی دوہری نسبت ۴ $\text{ا}^2$ : ۹ $\text{ب}^2$ ہے۔

(۲) نسبت ۴۹ : ۲۵ کی جذری نسبت ۷ : ۵ ہے۔

(۳) نسبت ۲ لا : ۱ کی تہری نسبت ۸ $\text{لا}^3$ : ۱ ہے۔

**۹**۔ اگر ا > ب تو ا : ب نسبت کبریٰ غیر متساوی کہلاتی ہے۔

اگر ا < ب تو ا : ب نسبت صغریٰ غیر متساوی کہلاتی ہے۔

اگر ا = ب تو ا : ب نسبت مساوات کہلاتی ہے۔

**۱۰**۔ اگر ا، ب اور لا تین مثبت مقداریں ہوں تو نسبت ا : ب بالترتیب بڑی ہوگی یا چھوٹی ہوگی نسبت ا + لا : ب + لا سے بموجب اس کے کہ ا بڑا ہو یا چھوٹا ہو ب سے۔

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}} = \frac{\text{ا لا} - \text{ب لا}}{\text{ب}(\text{ب} + \text{لا})} = \frac{\text{لا}(\text{ا} - \text{ب})}{\text{ب}(\text{ب} + \text{لا})}$$

اور ا ـ ب مثبت ہے یا منفی بمطابق اس کے کہ ا بڑا ہے یا چھوٹا ہے ب سے۔

اس لیے اگر ا > ب تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} > \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}}$

اور اگر ا < ب تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} < \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}}$

جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

اسی طرح سے یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ نسبت ا : ب بالترتیب بڑی ہوگی یا چھوٹی ہوگی ا ـ لا : ب ـ لا سے بموجب اس کے کہ ا چھوٹا ہو یا بڑا ہو ب سے۔

**۱۱**۔ جب دو یا زیادہ نسبتیں آپس میں برابر ہوں تو ان میں سے ہر ایک کو کسی حرف کے مساوی رکھنے سے کئی ایک کارآمد مسائل ثابت ہوسکتے ہیں۔ طریقۂ عمل کی توضیح ذیل کے مشہور مسئلہ کے ثبوت سے ہوگی۔

اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \ldots\ldots\ldots$

تو ہر ایک نسبت $= \left(\frac{\text{پ ا}^{\text{ن}} + \text{ق ج}^{\text{ن}} + \text{ر ع}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ ب}^{\text{ن}} + \text{ق د}^{\text{ن}} + \text{ر ف}^{\text{ن}} + \cdots}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}}$

جہاں پ، ق، ر کوئی مقداریں ہیں اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \cdots\cdots = \text{ک}$

تب $\text{ا} = \text{ب ک}$، $\text{ج} = \text{د ک}$، $\text{ع} = \text{ف ک}$ ..........

اس لیے $\frac{\text{پ ا}^{\text{ن}} + \text{ق ج}^{\text{ن}} + \text{ر ع}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ ب}^{\text{ن}} + \text{ق د}^{\text{ن}} + \text{ر ف}^{\text{ن}} + \cdots}$

$= \frac{\text{پ ب}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \text{ق د}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \text{ر ف}^{\text{ن}}\text{ک}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ ب}^{\text{ن}} + \text{ق د}^{\text{ن}} + \text{ر ف}^{\text{ن}} + \cdots} = \text{ک}^{\text{ن}}$

اس لیے $\left(\frac{\text{پ ا}^{\text{ن}} + \text{ق ج}^{\text{ن}} + \text{ر ع}^{\text{ن}} + \cdots}{\text{پ ب}^{\text{ن}} + \text{ق د}^{\text{ن}} + \text{ر ف}^{\text{ن}} + \cdots}\right)^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ک} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \cdots$

پ، ق، ر، ن کو مختلف قیمتیں دینے سے اس مسئلہ عامہ سے کئی خاص صورتیں حاصل ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ مندرجۂ بالا طریقہ کے استعمال سے ثابت ہو سکتی ہیں۔

مثلاً اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \cdots\cdots$

تو ان میں سے ہر ایک نسبت $= \frac{\text{ا} + \text{ج} + \text{ع} + \cdots}{\text{ب} + \text{د} + \text{ف} + \cdots}$

یہ نتیجہ نہایت کارآمد ہے اس کو الفاظ میں یوں بیان کر سکتے ہیں۔ اگر کئی کسریں باہم مساوی ہوں تو ان میں سے ہر ایک کسر ایک ایسی کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ سب شمار کنندوں کا حاصل جمع اور جس کا نسب نما تمام نسب نماؤں کا حاصل جمع ہو۔

**مثال (۱)۔** اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^{۳}ب + ۲ج^{۲}ع - ۳اع^{۲}ف}{ب^{۴} + ۲د^{۲}ف - ۳بف^{۳}} = \frac{اجع}{بدف}$$

فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = ک$

تب $ا = بک$، $ج = دک$ اور $ع = فک$

$$\therefore \frac{ا^{۳}ب + ۲ج^{۲}ع - ۳اع^{۲}ف}{ب^{۴} + ۲د^{۲}ف - ۳بف^{۳}}$$

$$= \frac{ب^{۴}ک^{۳} + ۲د^{۲}فک^{۳} - ۳بف^{۳}ک^{۳}}{ب^{۴} + ۲د^{۲}ف - ۳بف^{۳}}$$

$$= ک^{۳} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ع}{ف} = \frac{اجع}{بدف}$$

مثال (۲)۔ اگر $\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا^{۲} + ا^{۲}}{لا + ا} + \frac{ما^{۲} + ب^{۲}}{ما + ب} + \frac{ی^{۲} + ج^{۲}}{ی + ج} = \frac{(لا + ما + ی)^{۲} + (ا + ب + ج)^{۲}}{لا + ما + ی + ا + ب + ج}$$

فرض کرو کہ $\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج} = ک$

اس لیے $لا = اک$، $ما = بک$، $ی = جک$

$$\frac{لا^{۲} + ا^{۲}}{لا + ا} = \frac{ا^{۲}ک^{۲} + ا^{۲}}{اک + ا} = \frac{(ک^{۲} + ۱)ا}{ک + ۱}$$

اس لیے $\frac{لا^{۲} + ا^{۲}}{لا + ا} + \frac{ما^{۲} + ب^{۲}}{ما + ب} + \frac{ی^{۲} + ج^{۲}}{ی + ج}$

$$= \frac{(ک^{۲} + ۱)ا}{ک + ۱} + \frac{(ک^{۲} + ۱)ب}{ک + ۱} + \frac{(ک^{۲} + ۱)ج}{ک + ۱}$$

$$= \frac{(ک^{۲} + ۱)(ا + ب + ج)}{ک + ۱}$$

$$= \frac{\text{ک}^2(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2 + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{\text{ک}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

$$= \frac{(\text{ک ا}+\text{ک ب}+\text{ک ج})^2 + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{(\text{ک ا}+\text{ک ب}+\text{ک ج}) + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

$$= \frac{(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})^2 + (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی} + \text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}$$

۱۲- اگر کوئی مساوات بلحاظ چند مقادیر کے متجانس ہو تو اس مساوات میں اُن مقادیر کی جگہ ان کے متناسب رکھے جا سکتے ہیں۔

مثلاً مساوات $\text{ل لا}^3\text{ ما} + \text{م لا ما}^2\text{ ی} + \text{ن ما}^2\text{ ی}^2 = ۰$ بلحاظ لا، ما، ی کے متجانس ہے فرض کرو کہ ان کی متناسب تین مقادیر بالترتیب عہ، بہ، جہ ہیں۔

نیز فرض کرو کہ $\text{ک} = \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} = \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} = \frac{\text{ی}}{\text{جہ}}$

اس لیے $\text{لا} = \text{عہ ک}$، $\text{ما} = \text{بہ ک}$، $\text{ی} = \text{جہ ک}$

اور $\text{ل عہ}^3\text{ بہ ک}^4 + \text{م عہ بہ}^2\text{ جہ ک}^4 + \text{ن بہ}^2\text{ جہ}^2\text{ ک}^4 = ۰$۔

یعنی $\text{ل عہ}^3\text{ بہ} + \text{م عہ بہ}^2\text{ جہ} + \text{ن بہ}^2\text{ جہ}^2 = ۰$

اس مساوات کی شکل وہی ہے جو اصلی مساوات کی ہے صرف فرق یہ ہے کہ لا، ما، ی کی جگہ عہ، بہ، جہ بالترتیب لکھے ہوئے ہیں۔

۱۴- مسئلہ ذیل بڑا کارآمد ہے۔

اگر $\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}$ ، $\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2}$ ، $\frac{\text{ا}_3}{\text{ب}_3}$ ........ $\frac{\text{ا}_n}{\text{ب}_n}$

ایسی غیر مساوی کسریں ہوں جن کے نسب نما ایک ہی علامت کے ہوں تو کسر $\frac{\text{ا}_1+\text{ا}_2+\text{ا}_3+\cdots+\text{ا}_n}{\text{ب}_1+\text{ب}_2+\text{ب}_3+\cdots+\text{ب}_n}$ بلحاظ مقدار کے ان میں سے سب سے بڑی کسر اور سب سے چھوٹی کسر کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ سب نسب نما مثبت ہیں۔ اگر $\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{ب}_{\text{ر}}}$ سب سے چھوٹی کسر ہو تو اس کو ک سے تعبیر کرو۔ تب

$$\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{ب}_{\text{ر}}} = \text{ک} \qquad \therefore \text{ا}_{\text{ر}} = \text{ک ب}_{\text{ر}}$$

$$\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1} > \text{ک} \qquad \therefore \text{ا}_1 > \text{ک ب}_1$$

$$\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2} > \text{ک} \qquad \therefore \text{ا}_2 > \text{ک ب}_2$$ اور علیٰ ہذا القیاس

اس لیے جمع کرنے سے

$$\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}} > (\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \text{ب}_3 + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}})\,\text{ک}$$

اس لیے $$\frac{\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \text{ب}_3 + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}} > \text{ک}$$ یعنی $\frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{ب}_{\text{ر}}}$ سے

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ب}_1 + \text{ب}_2 + \text{ب}_3 + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}} < \frac{\text{ا}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}}$$

جہاں کسر $\frac{\text{ا}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}}$ دی ہوئی کسروں میں سب سے بڑی ہے۔

اسی طرح سے مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے جب تمام نسب نما منفی ہوں۔

۱۴۔ دفعہ ۱۱ کے عام اصول کا برجستہ استعمال ریاضی کی ہر شاخ میں ایسا کارآمد ہے کہ طالب علم کو خاص صورتوں میں جب کبھی ضرورت پڑے اسے بلا تکلف استعمال کرنا چاہیے اور یہ ضروری نہیں کہ معاون مقدار ک کو اثنائے عمل میں داخل کیا جائے۔

مثال (۱) اگر $$\frac{\text{ا}}{\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج} + \text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}}$$

تو ثابت کرو کہ (لا + ما + ی) / (ا + ب + ج) = [لا (ما + ی) + ما (ی + لا) + ی (لا + ما)] / [۲ (ا لا + ب ما + ج ی)]

ہر ایک کسر معلومہ = شمار کنندوں کا مجموعہ / نسب نماؤں کا مجموعہ = (لا + ما + ی) / (ا + ب + ج) ............ (۱)

نیز اگر ہم ان تینوں کسور کے شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو ما + ی، ی + لا، لا + ما سے بالترتیب ضرب دیں تو

ہر ایک کسر = لا (ما + ی) / [(ما + ی) (ب + ج − ا)] = ما (ی + لا) / [(ی + لا) (ج + ا − ب)]

= ی (لا + ما) / [(لا + ما) (ا + ب − ج)]

= شمار کنندوں کا مجموعہ / نسب نماؤں کا مجموعہ

= [لا (ما + ی) + ما (ی + لا) + ی (لا + ما)] / [۲ ا لا + ۲ ب ما + ۲ ج ی] ............ (۲)

اس لیے (۱) اور (۲) سے

(لا + ما + ی) / (ا + ب + ج) = [لا (ما + ی) + ما (ی + لا) + ی (لا + ما)] / [۲ (ا لا + ب ما + ج ی)]

**مثال (۲)** اگر لا / [ل (م ب + ن ج − ل ا)] = ما / [م (ن ج + ل ا − م ب)]

= ی / [ن (ل ا + م ب − ن ج)]

تو ثابت کرو کہ ل / [لا (ب ما + ج ی − ا لا)] = م / [ما (ج ی + ا لا − ب ما)]

= ن / [ی (ا لا + ب ما − ج ی)]

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}{\text{م ب + ن ج - ل ا}} = \frac{\frac{\text{ما}}{\text{م}}}{\text{ن ج + ل ا - م ب}} = \frac{\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{ل ا + م ب - ن ج}}$$

$$\therefore \; = \frac{\frac{\text{ما}}{\text{م}} + \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{۲ ل ا}} = \text{اور دو متشابہ جملے}$$

$$\therefore \; \frac{\text{ن ما + م ی}}{\text{ا}} = \frac{\text{ل ی + ن لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{م لا + ل ما}}{\text{ج}}$$

مندرجۂ بالا کسور میں سے پہلی کو اوپر اور نیچے لا سے ضرب دو۔ دوسری کو ما سے اور تیسری کو ی سے، تب

$$\frac{\text{ن لا ما + م لا ی}}{\text{ا لا}} = \frac{\text{ل ما ی + ن لا ما}}{\text{ب ما}} = \frac{\text{م لا ی + ل ما ی}}{\text{ج ی}}$$

$$= \frac{\text{۲ ل ما ی}}{\text{ب ما + ج ی - ا لا}} = \text{اور دو متشابہ جملے}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ل}}{\text{لا (ب ما + ج ی - ا لا)}} = \frac{\text{م}}{\text{ما (ج ی + ا لا - ب ما)}}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{ی (ا لا + ب ما - ج ی)}}$$

**۱۵۔ ضرب چلیپائی** ۔ اگر تین مجہول مقداروں میں درجۂ اول کی دو متجانس مساواتیں دی ہوئی ہوں مثلاً

$$\text{ا}_{۱}\text{ لا + ب}_{۱}\text{ ما + ج}_{۱}\text{ ی = ۰} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{ا}_{۲}\text{ لا + ب}_{۲}\text{ ما + ج}_{۲}\text{ ی = ۰} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

تو ہم ان کا مکمل حل دریافت نہیں کر سکتے لیکن انہیں شکل

$$\text{ا}_{۱}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right) + \text{ب}_{۱}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ی}}\right) + \text{ج}_{۱} = ۰$$

$$ا_۲ \left(\frac{لا}{ی}\right) + ب_۲ \left(\frac{ما}{ی}\right) + ج_۲ = ۰$$

میں لکھنے سے اور $\frac{لا}{ی}$ اور $\frac{ما}{ی}$ کو مجہول مقداریں تصور کرنے سے ہم معمولی طریقہ سے حل کر کے حاصل کرتے ہیں۔

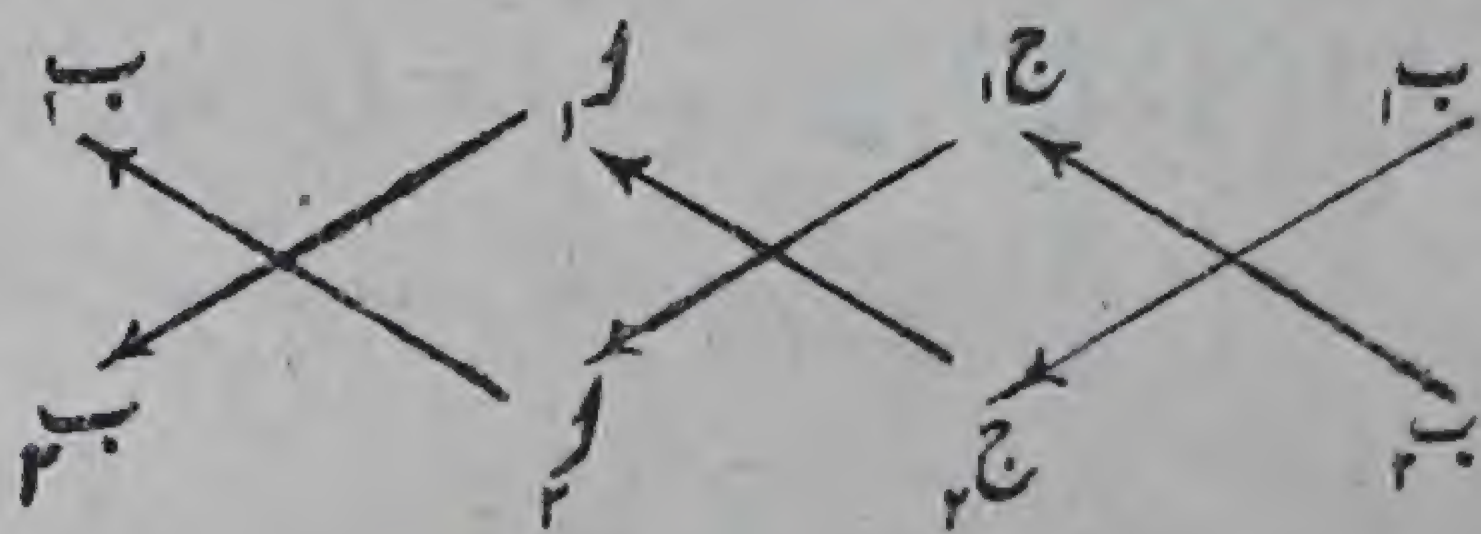
$$\frac{لا}{ی} = \frac{ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}، \quad \frac{ما}{ی} = \frac{ج_۱ ا_۲ - ج_۲ ا_۱}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}$$

یا تشاکلاً $\frac{لا}{ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱} = \frac{ما}{ج_۱ ا_۲ - ج_۲ ا_۱} = \frac{ی}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}$ ......(۳)

اس سے ظاہر ہے کہ جب کبھی دو مساواتیں بشکل (۱) اور (۲) معلوم ہوں تو اوپر کے قاعدے کی مدد سے ہم نسبتوں لا : ما : ی کو مساواتوں کے سروں کی رقوم میں بآسانی لکھ سکتے ہیں۔ اس کے یاد رکھنے کا آسان طریقہ یہ ہے۔

ما کے سر سے شروع کر کے لا، ما، ی کے سروں کو بالترتیب لکھ لو اور انہیں مکرر اس طرح لکھو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

$ب_۱ \quad ج_۱ \quad ا_۱ \quad ب_۱$

$ب_۲ \quad ج_۲ \quad ا_۲ \quad ب_۲$

سروں کو ترچھی سمت میں ضرب دو جیسے کہ تیر کے رخ سے ظاہر ہے اور ان حاصل ضربوں کے بنانے میں یاد رکھو کہ کوئی حاصل ضرب جو تیر کے نیچے اترنے سے حاصل ہو وہ مثبت ہوگا اور تیر کے اوپر چڑھنے سے حاصل ہو وہ منفی ہوگا۔ تین نتائج $ب_۱ ج_۲ - ب_۲ ج_۱$، $ج_۱ ا_۲ - ج_۲ ا_۱$، $ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱$ بالترتیب لا، ما، ی کے متناسب ہیں۔ اس کو ضرب چلیپائی کا قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال (۱) مساواتوں ۷ لا = ۴ ما + ۸ ی، ۳ ی = ۱۲ لا + ۱۱ ما سے

نسبتیں لا : ما : ی معلوم کرو:-

عمل نقل سے ۷ لا - ۴ ما - ۸ ی = ۰

۱۲ لا + ۱۱ ما - ۳ ی = ۰

سروں کو اس طرح لکھو -۴ -۸ ۷ -۴

۱۱ -۳ ۱۲ ۱۱

ان سے مفصلۂ ذیل حاصل ضرب حاصل ہونگے

(-۴) × (-۳) - ۱۱ (-۸)، (-۸) × ۱۲ - (-۳) × ۷، ۷ × ۱۱ - ۱۲ × (-۴)

یا ۱۰۰، -۷۵، ۱۲۵

اس لیے لا / ۱۰۰ = ما / -۷۵ = ی / ۱۲۵

یعنی لا / ۴ = ما / -۳ = ی / ۵

مثال (۲) ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

ا لا + ب ما + ج ی = ۰ ............... (۱)

لا + ما + ی = ۰ ................. (۲)

ب ج لا + ج ا ما + ا ب ی = (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) ......... (۳)

(۱) اور (۲) سے بموجب قاعدہ ضرب چلیپائی

لا / (ب - ج) = ما / (ج - ا) = ی / (ا - ب) = ک ............ (فرض کرو)

اس لیے لا = (ب - ج) ک، ما = (ج - ا) ک، ی = (ا - ب) ک

(۳) میں یہ قیمتیں رکھنے سے

ک {ب ج (ب - ج) + ج ا (ج - ا) + ا ب (ا - ب)}

= (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)

ک {-(ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)} = (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)

∴ ک = -۱

جس سے لا = ج - ب، ما = ا - ج، ی = ب - ا

۱۶- اگر دفعہ ۱۵ میں رکھیں ی = ا تو مساواتیں (۱) اور (۲) بن جائینگی

$$\text{ا}_1 \text{ لا} + \text{ب}_1 \text{ ما} + \text{ج}_1 = \text{۰}$$

$$\text{ا}_2 \text{ لا} + \text{ب}_2 \text{ ما} + \text{ج}_2 = \text{۰}$$

اور نتیجہ (۳) سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{\text{۱}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}$$

یا $\text{لا} = \frac{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$ اور $\text{ما} = \frac{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$

اس لیے ظاہر ہے کہ دو مجہول مقداروں میں درجۂ اول کی دو ہمزاد مساواتیں ضرب چلیپائی کے قاعدہ سے حل ہوسکتی ہیں۔

مثال- حل کرو ۵ لا - ۳ ما - ۱ = ؛ لا + ۲ ما = ۱۲

عمل نقل سے ۵ لا - ۳ ما - ۱ = ۰

لا + ۲ ما - ۱۲ = ۰

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{۳۶} + \text{۲}} = \frac{\text{ما}}{-\text{۱} + \text{۶۰}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱۰} + \text{۳}}$$

جس سے $\text{لا} = \frac{\text{۳۸}}{\text{۱۳}}$، $\text{ما} = \frac{\text{۵۹}}{\text{۱۳}}$

۱۷- لا، ما، ی کو ذیل کی مساواتوں سے ساقط کرو۔

$$\text{ا}_1 \text{ لا} + \text{ب}_1 \text{ ما} + \text{ج}_1 \text{ ی} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۱})$$

$$\text{ا}_2 \text{ لا} + \text{ب}_2 \text{ ما} + \text{ج}_2 \text{ ی} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

$$\text{ا}_3 \text{ لا} + \text{ب}_3 \text{ ما} + \text{ج}_3 \text{ ی} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{\text{ی}}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} = \text{ک}$$ (فرض کرو)

(۳) میں لا کی جگہ (ب₂ ج₃ − ب₃ ج₂) ک اور ما اور ی کی جگہ تشابہ جملے رکھنے سے اور ک پر تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$ا_1(ب_2ج_3 - ب_3ج_2) + ب_1(ج_2ا_3 - ج_3ا_2) + ج_1(ا_2ب_3 - ا_3ب_2) = ۰$$

اس ربط کو دی ہوئی مساواتوں کا حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

# امثلہ نمبری (۱)

۱۔ نسبت مؤلفہ دریافت کرو۔

(۱) نسبت ۲ا : ۳ب اور دوہری نسبت ۹ب$^{۲}$ : اب کی۔

(۲) جذری نسبت ۶۴ : ۹ اور نسبت ۲۷ : ۵۶ کی

(۳) دوہری نسبت $\frac{۲ا}{ب}$ : $\frac{\sqrt{ا^{۲}}}{ب^{۲}}$ اور نسبت ۳ا لا : ۲ب ما کی۔

۲۔ اگر لا + ۷ : ۲ (لا + ۱۴) دوہری نسبت ہو ۵ : ۸ کی تو لا معلوم کرو۔

۳۔ دو ایسے عدد دریافت کرو جن کی نسبت ۷ : ۱۲ ہو اور جن میں سے ایک عدد دوسرے عدد سے بقدر ۲۷۵ کے بڑا ہو۔

۴۔ نسبت ۵ : ۳۷ کی ہر ایک رقم میں کیا عدد زیادہ کیا جائے کہ یہ نسبت ۱ : ۳ کے برابر ہو جائے؟

۵۔ اگر لا : ما = ۳ : ۴ تو نسبت ۷ لا − ۴ ما : ۳ لا + ما کی قیمت دریافت کرو۔

۶۔ اگر ۱۵ (۲ لا$^{۲}$ − ما$^{۲}$) = ۷ لا ما تو نسبت لا : ما دریافت کرو۔

۷۔ اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \frac{ا^{۳}}{ب^{۳}} = \frac{۳ا^{۳} + ۴ا^{۲}ج + ۵ج^{۲}ع}{۳ب^{۳} + ۴ب^{۲}د + ۵د^{۲}ف}$$

$$(۲)\quad \frac{ا^{۲}ج^{۲}}{ب^{۲}د^{۲}} = \frac{ا^{۴} + ۵ج^{۳}ع + ع^{۴}}{ب^{۴} + ۵د^{۳}ف + ف^{۴}}$$

(۳) $\frac{۲ ا^{۶} ب^{۲} + ۳ ا^{۴} ع^{۲} - ۵ ع^{۴} ف}{۲ ب^{۶} + ۳ ب^{۴} ف^{۲} - ۵ ف^{۵}} = \frac{ا^{۳}}{ب^{۳}}$

۸۔ اگر $\frac{ا}{لا + ما} = \frac{ب}{ما - ی} = \frac{ج}{ی + لا}$ تو ثابت کرو کہ $ا = ب + ج$

۹۔ اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{ا}{د}$ برابر ہے

$\sqrt{\frac{ا^{۵} + ب^{۲} ج^{۲} + ا^{۳} ج^{۲}}{ب^{۴} ج^{۲} + د^{۲} + ب^{۲} ج د^{۲}}}$ کے

۱۰۔ اگر $\frac{لا}{ق + ر - پ} = \frac{ما}{ر + پ - ق} = \frac{ی}{پ + ق - ر}$

تو ثابت کرو کہ $(ق - ر)\, لا + (ر - پ)\, ما + (پ - ق)\, ی = ۰$

۱۱۔ اگر $\frac{ما}{لا - ی} = \frac{ما + لا}{ی} = \frac{لا}{ما}$ تو نسبتیں $لا : ما : ی$ دریافت کرو

۱۲۔ اگر $\frac{ما + ی}{پ ب + ق ج} = \frac{ی + لا}{پ ج + ق ا} = \frac{لا + ما}{پ ا + ق ب}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{۲ (لا + ما + ی)}{ا + ب + ج} = \frac{(ب + ج)\, لا + (ج + ا)\, ما + (ا + ب)\, ی}{ب ج + ج ا + ا ب}$

۱۳۔ اگر $\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{لا^{۳} + ا^{۳}}{لا^{۲} + ا^{۲}} + \frac{ما^{۳} + ب^{۳}}{ما^{۲} + ب^{۲}}$

$+ \frac{ی^{۳} + ج^{۳}}{ی^{۲} + ج^{۲}} = \frac{(لا + ما + ی)^{۳} + (ا + ب + ج)^{۳}}{(لا + ما + ی)^{۲} + (ا + ب + ج)^{۲}}$

۱۴۔ اگر $\frac{۲ ما + ۲ ی - لا}{ا} = \frac{۲ ی + ۲ لا - ما}{ب} = \frac{۲ لا + ۲ ما - ی}{ج}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{لا}{۲ ب + ۲ ج - ا} = \frac{ما}{۲ ج + ۲ ا - ب} = \frac{ی}{۲ ا + ۲ ب - ج}$

**۱۵**- اگر (ا$^2$ + ب$^2$ + ج$^2$) (لا$^2$ + ما$^2$ + ی$^2$) = (ا لا + ب ما + ج ی)$^2$
تو ثابت کرو کہ لا : ا = ما : ب = ی : ج

**۱۶**- اگر ل (م ما + ن ی - ل لا) = م (ن ی + ل لا - م ما)
= ن (ل لا + م ما - ن ی) تو ثابت کرو کہ

(ما + ی - لا) / ل = (ی + لا - ما) / م = (لا + ما - ی) / ن

**۱۷**- ثابت کرو کہ مساواتوں
ا لا + ج ما + ب ی = ۰، ج لا + ب ما + ا ی = ۰
ب لا + ا ما + ج ی = ۰
کا حاصل اسقاط ا$^3$ + ب$^3$ + ج$^3$ - ۳ ا ب ج = ۰ ہے۔

**۱۸**- لا، ما، ی کو مساواتوں
ا لا + ھ ما + گ ی = ۰ ھ لا + ب ما + ف ی = ۰
گ لا + ف ما + ج ی = ۰ سے ساقط کرو

**۱۹**- اگر لا = ج ما + ب ی، ما = ا ی + ج لا، ی = ب لا + ا ما
تو ثابت کرو کہ لا$^2$ / (۱ - ا$^2$) = ما$^2$ / (۱ - ب$^2$) = ی$^2$ / (۱ - ج$^2$)

**۲۰**- معلوم ہے ا (ما + ی) = لا، ب (ی + لا) = ما
اور ج (لا + ما) = ی
ثابت کرو کہ ب ج + ج ا + ا ب + ۲ ا ب ج = ۱

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

**۲۱**- ۳ لا - ۴ ما + ۷ ی = ۰
۲ لا - ما - ۲ ی = ۰
۳ لا$^3$ - ما$^3$ + ی$^3$ = ۱۸

**۲۲**- لا + ما = ی
۳ لا - ۲ ما + ۱۷ ی = ۰

$\text{لا}^2 + 3\,\text{ما}^2 + 2\,\text{ی}^3 = 167$

۲۳- $7\,\text{ما}\,\text{ی} + 3\,\text{ی}\,\text{لا} = 4\,\text{لا}\,\text{ما}$

$21\,\text{ما}\,\text{ی} - 3\,\text{ی}\,\text{لا} = 4\,\text{لا}\,\text{ما}$

$\text{لا} + 2\,\text{ما} + 3\,\text{ی} = 19$

۲۴- $3\,\text{لا}^2 - 2\,\text{ما}^2 + 5\,\text{ی}^2 = 0$

$7\,\text{لا}^2 - 3\,\text{ما}^2 - 15\,\text{ی}^2 = 0$

$5\,\text{لا} - 4\,\text{ما} + 7\,\text{ی} = 6$

۲۵- اگر $\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ا}} - \sqrt{\text{ب}}} + \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ج}}} + \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ج}} - \sqrt{\text{ا}}} = 0$

اور $\frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{ب}}} + \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{ج}}} + \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ج}} + \sqrt{\text{ا}}} = 0$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ل}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ج}-\sqrt{\text{ا}\,\text{ب}})} = \frac{\text{م}}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ا}-\sqrt{\text{ب}\,\text{ج}})}$

$= \frac{\text{ن}}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ب}-\sqrt{\text{ا}\,\text{ج}})}$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

۲۶- $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی} = 0$

$\text{ب}\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{ا}\,\text{ما} + \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ی} = 0$

$\text{لا}\,\text{ما}\,\text{ی} + \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}\,(\text{ا}^3\,\text{لا} + \text{ب}^3\,\text{ما} + \text{ج}^3\,\text{ی}) = 0$

۲۷- $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی} = \text{ا}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{ما} + \text{ج}^2\,\text{ی} = 0$

$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} + (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب}) = 0$

۲۸- اگر $\text{ا}\,(\text{ما}+\text{ی}) = \text{لا}$، $\text{ب}\,(\text{ی}+\text{لا}) = \text{ما}$، $\text{ج}\,(\text{لا}+\text{ما}) = \text{ی}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}\,(1-\text{ب}\,\text{ج})} = \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}\,(1-\text{ج}\,\text{ا})} = \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}\,(1-\text{ا}\,\text{ب})}$

**۲۹**۔ اگر $\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ ی} = \text{ھ لا} + \text{ب ما} + \text{ف ی} = ۰$ اور $\text{گ لا} + \text{ف ما} + \text{ج ی} = ۰$ تو ثابت کرو

$$(۱)\quad \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ب ج} - \text{ف}^{۲}} = \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ج ا} - \text{گ}^{۲}} = \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^{۲}}$$

$$(۲)\quad (\text{ب ج} - \text{ف}^{۲})(\text{ج ا} - \text{گ}^{۲})(\text{ا ب} - \text{ھ}^{۲})$$

$$= (\text{ف گ} - \text{ج ھ})(\text{گ ھ} - \text{ا ف})(\text{ھ ف} - \text{ب گ})$$

# بابِ دُوّم

## تناسب

۱۸۔ **تعریف** جب دو نسبتیں مساوی ہوں تو چار مقادیر کو جو ان میں شامل ہوتی ہیں **متناسب** کہتے ہیں مثلاً $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو ا، ب، ج، د کو متناسب کہینگے۔ اس ربط کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ا کو ب سے وہی نسبت ہے جو ج کو د سے ہے اور یہ تناسب اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$ا : ب :: ج : د$$

یا $$ا : ب = ج : د$$

ا اور د کو طرفین تناسب اور ب اور ج کو وسطین تناسب کہتے ہیں۔

۱۹۔ اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج، د متناسب ہیں

بموجب تعریف $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$

دونوں طرف ب د سے ضرب دینے سے $ا\,د = ب\,ج$

پس ظاہر ہے کہ اگر کسی تناسب کی تین رقمیں معلوم ہوں، تو چوتھی رقم معلوم ہو سکتی ہے

مثلاً اگر ا، ج، د معلوم ہوں تو $ب = \frac{ا\,د}{ج}$

بر عکس اس کے اگر چار مقادیر ا، ب، ج، د ایسی ہوں کہ
ا د = ب ج تو ا، ب، ج، د متناسب ہونگے اور ان میں سے ا، د
طرفین اور ب، ج وسطین ہونگے یا بر عکس اس کے۔
**مثال**۔ فرض کرو کہ تناسب کی پہلی تیسری چوتھی رقمیں بالترتیب
$\frac{۱}{۲}$، $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۶}{۸}$ ہیں۔ اگر لا سے دوسری رقم کو تعبیر کریں تو $\frac{۱}{۲}$ : لا = $\frac{۴}{۳}$ : $\frac{۶}{۸}$

جس سے $\frac{۴}{۳}$ × لا = $\frac{۱}{۲}$ × $\frac{۶}{۸}$

یعنی لا = $\frac{۱}{۲}$ × $\frac{۶}{۸}$ × $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۹}{۳۲}$

**۲۰۔ تعریف**۔ مقادیر **تناسب مسلسل** میں کہلاتی ہیں اگر
پہلی کو دوسری سے وہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری سے اور تیسری کو
چوتھی سے ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔
مثلاً ا، ب، ج، د ......... تناسب مسلسل میں ہوں گے اگر

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \dots\dots\dots$$

اگر تین مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں تو

ا : ب = ب : ج

اس صورت میں ب کو **وسط تناسب** اور ج کو ا اور ب کا
**تیسرا متناسب** کہتے ہیں۔

## ۲۱۔ تناسب مسلسل میں مقادیر کے رشتے۔

اگر تین مقادیر ا، ب، ج تناسب مسلسل میں ہوں تو

ا : ج = ا$^{۲}$ : ب$^{۲}$ = ب$^{۲}$ : ج$^{۲}$ اور ب = $\sqrt{ا ج}$

اگر چار مقادیر ا، ب، ج، د تناسب مسلسل میں ہوں

ا : د = ا$^{۳}$ : ب$^{۳}$ = ب$^{۳}$ : ج$^{۳}$ = ج$^{۳}$ : د$^{۳}$

اور ب = $\sqrt[۳]{ا^{۲} د}$، ج = $\sqrt[۳]{ا د^{۲}}$

کیونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$

اس لیے $\frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ج} \times \frac{ب}{ج}$

جس سے $\frac{ا}{ج} = \frac{ب^۲}{ج^۲} = \frac{ا^۲}{ب^۲}$ ......... (۱)

نیز $ا ج = ب^۲$

جس سے $ب = \sqrt{ا ج}$ ......... (۲)

مساوات (۱) اور (۲) سے دو مسائل مندرجہ بالا ثابت ہوئے۔

نیز اگر ا، ب، ج، د تناسب مسلسل میں ہوں تو

$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$

اس لیے $\frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ج}{د}$

یعنی $\frac{ا^۳}{ب^۳} = \frac{ا}{د}$

اس لیے $\frac{ا}{د} = \frac{ا^۳}{ب^۳} = \frac{ب^۳}{ج^۳} = \frac{ج^۳}{د^۳}$ ......... (۳)

نیز چونکہ $\frac{ا}{د} = \frac{ا^۳}{ب^۳}$ اس لیے $ب^۳ = ا^۲ د$

جس سے $ب = \sqrt[۳]{ا^۲ د}$ ......... (۴)

نیز چونکہ $\frac{ا}{د} = \frac{ج^۳}{د^۳}$

$ج^۳ = ا د^۲$

جس سے $ج = \sqrt[۳]{ا د^۲}$ ......... (۵)

نتیجہ (۲) سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر ا اور ج کے درمیان وسط تناسب کا معلوم کرنا جذر نکالنے پر موقوف ہے۔

مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان وسط تناسب ہے۔

$\sqrt{(۱\times۲)} = \sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲$

۲۲۔ اگر ا : ب = ج : د اور ع : ف = گ : ھ

تو ا ع : ب ف = ج گ : د ھ

چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ اور $\frac{ع}{ف} = \frac{گ}{ھ}$

اس لیے $\frac{ا ع}{ب ف} = \frac{ج گ}{د ھ}$

یا ا ع : ب ف = ج گ : د ھ

نتیجہ صریح۔ اگر ا : ب = ج : د

اور ب : لا = د : ما

تو ا : لا = ج : ما

۲۳۔ اگر چار مقادیر ا، ب، ج، د متناسب ہوں تو اُن سے کئی اور تناسب کسروں کے خواص کے استعمال سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اور ان میں سے اکثر مسلکہ اصطلاحات ہندسیہ سے نامزد ہوتے ہیں۔

(۱) اگر ا : ب = ج : د

تو ب : ا = د : ج [عکس نسبت]

کیونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ اس لیے $۱ \div \frac{ا}{ب} = ۱ \div \frac{ج}{د}$

یعنی $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$

یا ب : ا = د : ج

(۲) اگر ا : ب = ج : د

تو ا : ج = ب : د [تبدیل نسبت]

چونکہ ا د = ب ج اس لیے $\frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج د}}$

یعنی $\frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

یا ا : ج = ب : د

(۳) اگر ا : ب = ج : د

تو ا + ب : ب = ج + د : د [ترکیب نسبت]

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ اس لیے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + ۱ = \frac{\text{ج}}{\text{د}} + ۱$

یعنی $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج} + \text{د}}{\text{د}}$

یا ا + ب : ب = ج + د : د

(۴) اگر ا : ب = ج : د

تو ا - ب : ب = ج - د : د [تفصیل نسبت]

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ اس لیے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - ۱ = \frac{\text{ج}}{\text{د}} - ۱$

یعنی $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج} - \text{د}}{\text{د}}$

یا ا - ب : ب = ج - د : د

(۵) اگر ا : ب = ج : د

تو ا + ب : ا - ب = ج + د : ج - د

نتیجہ (۳) سے $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج} + \text{د}}{\text{د}}$

ایضاً (۴) سے $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج} - \text{د}}{\text{د}}$

اس لیے عمل تقسیم سے $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ج + د}{ج - د}$

یا $ا + ب : ا - ب = ج + د : ج - د$

**۲۴- دفعہ** ماقبل کے نتیجے اقلیدس کے پانچویں مقالہ کے بعض مسئلوں کے جبریہ معادل ہیں اور طالب علم کو چاہیے کہ لفظوں میں ان کو بخوبی بیان کر سکے۔ مثلاً تفصیل نسبت کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے :-

اگر چار مقداریں متناسب ہوں تو پہلی کی جو زیادتی دوسری پر ہے اس کو دوسری مقدار سے وہی نسبت ہو گی جو چوتھی مقدار کے اوپر تیسری کی زیادتی کو چوتھی مقدار کے ساتھ ہے۔

**۲۵-** اب ہم تناسب کی جبریہ تعریف کا اقلیدس کی تعریف تناسب سے مقابلہ کریں گے۔ اقلیدس کی تعریف یہ ہے۔

دی ہوئی چار مقادیر میں اگر پہلی اور تیسری مقادیر کے کوئی مساوی ضعف لئے جائیں اور نیز دوسری اور چوتھی مقادیر کے کوئی مساوی ضعف لیئے جائیں اور اگر تیسری مقدار کا ضعف چوتھی مقدار کے ضعف سے بڑا ہو یا برابر ہو یا چھوٹا ہو بمطابق اس کے کہ پہلی مقدار کا ضعف دوسری مقدار کے ضعف سے بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے تو دی ہوئی چار مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔

جبریہ علامات میں یہ تعریف اس طرح بیان ہو گی۔

چار مقادیر ا، ب، ج، د متناسب ہو نگی اگر

ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب، اس میں ف اور ق کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ سے تعریف ہندسیہ حاصل کرنی ہے۔

چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ اس لیے طرفین کو $\frac{ف}{ق}$ سے ضرب دینے سے حاصل

ہوگا $\frac{\text{ف ا}}{\text{ق ب}} = \frac{\text{ف ج}}{\text{ق د}}$ اس لیے کسروں کے خواص سے

ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب جس سے

ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

(۲) فرض کرو ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ تعریف ہندسیہ سے حاصل کرنی ہے معلوم ہے ف ج $\gtreqless$ ق د بمطابق اس کے کہ ف ا $\gtreqless$ ق ب اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$

اگر کسور $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ برابر نہ ہوں تو ان میں سے کوئی ایک دوسری سے بڑی ہوگی۔ فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} > \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ تو اس صورت میں ایک ایسی کسر $\frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ دریافت ہو سکتی ہے جو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ کے درمیان واقع ہو جہاں ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} > \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ ............ (۱)

اور $\frac{\text{ج}}{\text{د}} < \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ ............ (۲)

بموجب (۱) ف ا $>$ ق ب

اور بموجب (۲) ف ج $<$ ق د

اور جو کچھ ہم نے فرض کیا تھا یہ اس کے خلاف ہے۔

اس لیے $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$ غیر مساوی نہیں ہیں یعنی

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

**۲۶۔** اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ تناسب کی تعریف ہندسیہ کا تعلق مقادیر مقرون سے ہے جیسے خطوط، رقبے، وغیرہ جو ہندسی طریقہ پر تعبیر کیے گئے ہوں مگر جن کی پیمائش میں ناپ کی کسی مشترک اکائی کا حوالہ نہ ہو اس لیے اقلیدس کی تعریف مقادیر متباین اور متوافق دونوں پر حاوی ہے مگر تعریف جبریہ اگر صحیح طور پر بیان کی جائے تو صرف مقادیر متوافق پر ہی صادق آتی ہے کیونکہ اس کے بموجب سب سے پہلے یہ مان لینا پڑتا ہے کہ مقدار ا مقدار ب کا وہی معین حصہ یا حصے یا ضعف ہے جو ج، مقدار د کا ہے، لیکن وہ سب ثبوت جو ہم نے متوافق مقادیر کے لیے دیے ہیں متباین مقادیر کے لیے بھی درست ہیں کیونکہ جیسا کہ ہم دفعہ ۷ میں بتا چکے ہیں ہمیشہ دو صحیح عدد ایسے معلوم کیے جا سکتے ہیں کہ ان کی نسبت اور دو متبائن مقداروں کی نسبت کا تفاوت کسی اختیاری مقدار سے کم ہو۔ اس کو زیادہ عام طور پر دفعہ مابعد میں ثابت کیا جائے گا۔

**۲۷۔** فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر متبائن ہیں، مقدار ب کو م مساوی حصوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک حصہ بہ کے مساوی ہو۔ پس ب = م بہ جہاں م مثبت صحیح عدد ہے۔ نیز فرض کرو کہ بہ، مقدار ا میں ن سے زیادہ دفعہ اور ن + ۱ سے کم دفعہ شامل ہے

تب $\frac{ا}{ب}$ بڑا ہوگا $\frac{ن\ بہ}{م\ بہ}$ سے اور چھوٹا ہوگا $\frac{(ن + ۱)\ بہ}{م\ بہ}$ سے یعنی $\frac{ا}{ب}$ کسروں $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{ن + ۱}{م}$ کے درمیان واقع ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ن}{م}$ کا فرق $\frac{۱}{م}$ سے کم ہے اور چونکہ ہم بہ کو (جو ہماری پیمائش کی اکائی ہے) اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اس لیے ہم م کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں، پس $\frac{۱}{م}$ جتنا چھوٹا چاہیں بنایا جا سکتا ہے اور دو صحیح اعداد ن اور م ایسے معلوم کیے جا سکتے ہیں کہ ان کی نسبت ا اور ب کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجۂ صحت تک بیان کرے۔

۲۸- اس باب کو ہم امثلۂ ذیل کے حل پر ختم کریں گے، بعض اوقات خاص قسم کی مساواتوں کا حل ترکیب اور تفصیل نسبت کے قاعدہ کے مناسب استعمال سے بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۱) اگر (۲م ا + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د)
× (۲م ا − ۶م ب − ۳ن ج + ۹ن د)
= (۲م ا − ۶م ب + ۳ن ج − ۹ن د)(۲م ا + ۶م ب − ۳ن ج − ۹ن د)
تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د متناسب ہیں۔

چونکہ
$$\frac{\text{۲م ا + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}}{\text{۲م ا − ۶م ب + ۳ن ج − ۹ن د}} = \frac{\text{۲م ا + ۶م ب − ۳ن ج − ۹ن د}}{\text{۲م ا − ۶م ب − ۳ن ج + ۹ن د}}$$

اس لیے ترکیب اور تفصیل نسبت سے
$$\frac{\text{۲(۲م ا + ۳ن ج)}}{\text{۲(۶م ب + ۹ن د)}} = \frac{\text{۲(۲م ا − ۳ن ج)}}{\text{۲(۶م ب − ۹ن د)}}$$

تبدیل نسبت سے
$$\frac{\text{۲م ا + ۳ن ج}}{\text{۲م ا − ۳ن ج}} = \frac{\text{۶م ب + ۹ن د}}{\text{۶م ب − ۹ن د}}$$

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے
$$\frac{\text{۴م ا}}{\text{۶ن ج}} = \frac{\text{۱۲م ب}}{\text{۱۸ن د}}$$

جس سے $\frac{\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ یا ا : ب = ج : د

مثال (۲) مساوات
$$\frac{\sqrt{\text{لا + ۱}} + \sqrt{\text{لا − ۱}}}{\sqrt{\text{لا + ۱}} - \sqrt{\text{لا − ۱}}} = \frac{\text{۴لا − ۱}}{\text{۲}}$$
کو حل کرو

ترکیب اور تفصیل نسبت سے حاصل ہوگا
$$\frac{\sqrt{\text{لا + ۱}}}{\sqrt{\text{لا − ۱}}} = \frac{\text{۴لا + ۱}}{\text{۴لا − ۳}}$$

اس لیے $\frac{لا+۱}{لا-۱} = \frac{۱۶لا^۲+۸لا+۱}{۱۶لا^۲-۲۴لا+۹}$

پھر ترکیب اور تفصیل نسبت سے $\frac{۲لا}{۲} = \frac{۳۲لا^۲-۱۶لا+۱۰}{۳۲لا-۸}$

اس لیے $لا = \frac{۱۶لا^۲-۸لا+۵}{۱۶لا-۴}$

جس سے $۱۶لا^۲-۴لا = ۱۶لا^۲-۸لا+۵$

اس لیے $لا = \frac{۵}{۴}$

# امثلہ نمبری (۲)

۱- اعداد ۳، ۵، ۲۷ کا چوتھا متناسب دریافت کرو۔

۲- وسط تناسب دریافت کرو۔

(۱) ۶ اور ۲۴ کے درمیان

(۲) ۳۶۰ $ا^۳$ اور ۲۵۰ $ا ب^۲$ کے درمیان

۳- $\frac{لا}{ما} + \frac{ما}{لا}$ اور $\frac{لا}{ما}$ کا تیسرا متناسب دریافت کرو۔

اگر ا : ب = ج : د تو ثابت کرو کہ

۴- $ا^۲ج + اج^۲ : ب^۲د + بد^۲ = (ا+ج)^۳ : (ب+د)^۳$

۵- $فا^۲ + قب^۲ : فا^۲ - قب^۲ = فج^۲ + قد^۲ : فج^۲ - قد^۲$

۶- $ا - ج : ب - د = \sqrt{ا^۲+ج^۲} : \sqrt{ب^۲+د^۲}$

۷- $\sqrt{ا^۲+ج^۲} : \sqrt{ب^۲+د^۲} = \sqrt{اج + \frac{ج^۳}{ا}} : \sqrt{بد + \frac{د^۳}{ب}}$

اگر ا، ب، ج، د تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ

۸- $ا : ب + د = ج^۳ : ج^۲د + د^۳$

۹۔ $۲ا + ۳د : ۳ا - ۴د = ۲ا^{۲} + ۳ب^{۲} : ۳ا^{۲} - ۴ب^{۲}$

۱۰۔ $(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲}) = (اب + بج + جد)^{۲}$

۱۱۔ اگر ا اور ج کا وسط متناسب ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^{۲} - ب^{۲} + ج^{۲}}{ا^{-۲} - ب^{-۲} + ج^{-۲}} = ب^{۴}$$

۱۲۔ اگر ا : ب = س : د اور ع : ف = گ : ح تو ثابت کرو کہ
$اع + ب ف : اع - ب ف = س گ + د ح : س گ - د ح$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۳۔ $$\frac{۲لا^{۳} - ۳لا^{۲} + لا + ۱}{۲لا^{۳} - ۳لا^{۲} - لا - ۱} = \frac{۳لا^{۳} - لا^{۲} + ۵لا - ۱۳}{۳لا^{۳} - لا^{۲} - ۵لا + ۱۳}$$

۱۴۔ $$\frac{۳لا^{۴} + لا^{۲} - ۲لا - ۳}{۳لا^{۴} - لا^{۲} + ۲لا + ۳} = \frac{۵لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۷لا + ۳}{۵لا^{۴} - ۲لا^{۳} + ۷لا - ۳}$$

۱۵۔ $$\frac{(م + ن)لا - (ا - ب)}{(م - ن)لا - (ا + ب)} = \frac{(م + ن)لا + ا + ج}{(م - ن)لا + ا - ج}$$

۱۶۔ اگر ا، ب، ج، د متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا + د = ب + ج + \frac{(ا - ب)(ا - ج)}{ا}$$

۱۷۔ اگر ا، ب، ج، د، ع تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ
$(اب + بج + جد + دع)^{۲} = (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲})(ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲} + ع^{۲})$

۱۸۔ اگر لا - ۱ شخصوں کے لا + ۱ دن کے کام کی نسبت لا + ۲ شخصوں کے لا - ۱ دن کے کام سے ۹ : ۱۰ ہو تو لا معلوم کرو۔

۱۹۔ ایسے چار متناسب اعداد معلوم کرو جن کی طرفین کا مجموعہ ۲۱ ہو وسطین کا مجموعہ ۱۹ اور اُن سب کے مربعوں کا مجموعہ ۴۴۴ ہو۔

۲۰۔ دو ظرف ا اور ب ہیں۔ ان میں دو مختلف قسم کی شرابوں کے آمیزے بھرے گئے ہیں۔ ا میں اجزا کی نسبت ۲ : ۷ ہے اور ب میں ۱ : ۵۔ ہر ایک ظرف سے

کتنی کتنی مقداریں مختلف آمیزوں کی لی جائیں کہ ایک نیا آمیزہ بن جائے جس میں ۲ گیلن پہلی قسم کی شراب کے اور ۹ گیلن دوسری کے شامل ہوں۔

۲۱۔ ایک ظرف شراب سے پُر ہے، اس میں سے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور اُسے پانی سے بھر دیا گیا ہے پھر آمیزہ کے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور ظرف کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اگر ظرف میں اس وقت شراب اور پانی کی نسبت ۱۶ : ۹ ہو تو معلوم کرو کہ اس ظرف کی کُل گنجائش کتنی ہے۔

۲۲۔ اگر چار مثبت مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ پہلی اور آخری مقدار کا فرق باقی دو مقداروں کے فرق کا کم از کم تین گنا ہے۔

۲۳۔ انگلستان میں ۱۸۷۱ء سے لے کر ۱۸۸۱ء تک آبادی ۹،۵۱ فیصد بڑھی۔ اگر قصباتی آبادی ۸ فیصدی اور دیہاتی آبادی ۴ فیصدی بڑھی ہو تو ۱۸۷۱ء میں قصباتی اور دیہاتی آبادیوں کا مقابلہ کرو۔

۲۴۔ کسی ملک میں چائے کا صرفہ قہوہ سے ۵ گنا زیادہ ہے اگر ا فی صدی زیادہ چائے اور ب فی صدی زیادہ قہوہ صرف ہوتا تو کل مقدار صرف شدہ ۷ ج فی صدی زیادہ ہوتی۔ لیکن اگر ب فیصدی زیادہ چائے اور ا فیصدی زیادہ قہوہ استعمال ہوتا تو کل مقدار استعمال شدہ ۳ ج فی صدی زیادہ ہوتی۔ ا اور ب کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ پیتل کی ترکیب میں جست اور تانبے کی آمیزش ہے کانسے میں ۸۰ فیصدی تانبا ۴ فیصدی جست اور ۱۶ فیصدی قلعی شامل ہے۔ کسی پگھلے ہوئے پیتل اور کانسے کے مرکب میں ۷۴ فیصدی تانبا اور ۱۶ فیصدی جست اور ۱۰ فی صدی قلعی پائی گئی پیتل کی ترکیب میں تانبے اور جست کی نسبت معلوم کرو۔

۲۶۔ چند ملاح کشتی کو ایک خاص فاصلہ تک بہاؤ کے خلاف ۸۴ منٹ میں لے جا سکتے ہیں اور بہاؤ کے رُخ میں اسی فاصلہ کو کھڑے پانی کی نسبت ۹ منٹ کے عرصہ میں طے کر لیتے ہیں، معلوم کرو کہ بہاؤ کے رُخ میں اسی فاصلہ کو کتنی دیر میں طے کر لیں گے۔

# باب سوم

## تغیر

**۲۹۔ تعریف**۔ جب کہا جائے کہ ایک مقدار ما بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے ایک دوسری مقدار لا تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ دو مقادیر ایک دوسرے پر اس طرح موقوف ہیں کہ اگر لا کو بدلا جائے تو ما بھی **اسی نسبت** سے بدلے گا۔

**نوٹ**۔ لفظ "بالراست" کو اکثر حذف کرتے ہیں اور صرف یہی کہتے ہیں کہ ما ایسا بدلتا ہے جیسا لا۔

اس قسم کے تغیر کی مثال یہ ہے کہ اگر ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۶۰ منٹ میں ۴۰ میل جا رہی ہو تو وہ ۳۰ منٹ میں ۲۰ میل اور ۱۲۰ منٹ میں ۸۰ میل جائے گی وغیرہ وغیرہ، ہر ایک صورت میں طے کردہ فاصلہ اسی نسبت سے بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے جیسے وقت۔ اسے اکثر یوں بیان کرتے ہیں کہ جب رفتار یکساں ہو تو **فاصلہ متناسب ہوتا ہے وقت کے** یا **فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے وقت**۔

**۳۰**۔ رمز $\propto$ تغیر کو تعبیر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ پس ما $\propto$ لا کو اس طرح پڑھتے ہیں "ما ایسے بدلتا ہے جیسے لا"۔

**۳۱**۔ اگر ما ایسا بدلتا ہو جیسا لا تو ما ایک مستقل مقدار اور لا کے

حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ $ما_۱$، $ما_۲$، $ما_۳$ ........... اور $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$ ..........
متناظر قیمتیں ما اور لا کی ہیں۔

بموجب تعریف $\frac{ما}{ما_۱} = \frac{لا}{لا_۱}$، $\frac{ما}{ما_۲} = \frac{لا}{لا_۲}$، $\frac{ما}{ما_۳} = \frac{لا}{لا_۳}$ اور علیٰ ہذا القیاس

$\therefore \frac{ما_۱}{لا_۱} = \frac{ما_۲}{لا_۲} = \frac{ما_۳}{لا_۳} = ........$، چونکہ ہر ایک $\frac{ما}{لا}$ کے برابر ہے

اس لیے $\frac{\text{ما کی کوئی قیمت}}{\text{لا کی متناظر قیمت}}$ ہمیشہ وہی رہتی ہے

یعنی $\frac{ما}{لا} = م$ جہاں م مقدار مستقل ہے۔

$\therefore$ ما = م لا .............................. (۱)

اگر ما اور لا کی متناظر قیمتوں کا کوئی زوج معلوم ہو تو مساوات (۱) سے مقدار مستقل م کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ما = ۳، جبکہ لا = ۱۲ تو ۳ = م × ۱۲

اس لیے م = $\frac{۱}{۴}$ اور ما = $\frac{۱}{۴}$ لا

**مثال**۔ کسی دائرہ کا محیط $\propto$ قطر

$\therefore \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} =$ ایک مستقل مقدار

یہ مقدار $\pi$ سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کی تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ ہے۔ اس لیے محیط = ۲ $\pi$ ر جہاں ر نصف قطر ہے، اس میں $\pi$ عبرانی حرف "حیت" ہے۔

۳۲۔ اگر ایک مقدار ما اس طرح بدلے جیسے لا کا متکافی یا اُلٹ تو اسے ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ ما بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے لا
پس اگر ما بالعکس ایسے بدلے جیسے لا تو ما = $\frac{م}{لا}$ جہاں م ایک مستقل ہے۔ تغیر معکوس کی توضیح کے لیے ایک مثال مندرجۂ ذیل ہے:—

اگر ۶ آدمی ایک کام کو ۸ گھنٹہ میں کرتے ہوں تو ۱۲ آدمی اسی کام کو ۴ گھنٹے میں اور ۲ آدمی ۲۴ گھنٹے میں کرینگے اور علیٰ ہذا القیاس۔
اس سے ظاہر ہے کہ اگر آدمیوں کی تعداد بڑھادی جائے تو وقت اسی نسبت سے گھٹ جائیگا۔ اور برعکس اس کے۔

**مثال (۱)** فرض کرو کہ لا کا جذر الکعب ما کے مربع کے بالعکس بدلتا ہے۔
اگر لا = ۸ جبکہ ما = ۳ تو لا معلوم کرو جبکہ ما = $۱\frac{۱}{۲}$

بموجب مفروض $\sqrt[۳]{\text{لا}} = \frac{\text{م}}{\text{ما}^{۲}}$ جہاں م ایک مقدار مستقل ہے

اس مساوات میں لا = ۸ اور ما = ۳ رکھنے سے

$$۲ = \frac{\text{م}}{۹} \therefore \text{م} = ۱۸ \text{ اور } \sqrt[۳]{\text{لا}} = \frac{۱۸}{\text{ما}^{۲}}$$

اس لیے ما = $\frac{۳}{۲}$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵۱۲

**مثال (۲)** کسی سیارہ کی گردش کے وقت کا مربع ایسا بدلتا ہے جیساکہ **مکعب** اس فاصلہ کا جو سیارہ اور سورج کے درمیان ہو۔ اگر فرض کیا جائے کہ زمین اور زہرہ (وینس) کے فاصلے سورج سے جداگانہ ۹۱۲٫۵ اور ۶۶۰ لاکھ میل ہیں تو زہرہ کی گردش کا وقت دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ایک گردش کا وقت ت ہے دنوں میں اور د فاصلہ ہے لاکھ میلوں میں۔

بموجب مفروض $\text{ت}^{۲} \propto \text{د}^{۳}$

یا $\text{ت}^{۲} = \text{ک}\,\text{د}^{۳}$ جہاں ک مقدار مستقل ہے، پس زمین کے لیے

$$۳۶۵ \times ۳۶۵ = \text{ک} \times ۹۱۲٫۵ \times ۹۱۲٫۵ \times ۹۱۲٫۵$$

$$\text{جس سے ک} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۵}{۹۱۲٫۵ \times ۹۱۲٫۵ \times ۹۱۲٫۵}$$

$$= \frac{۱}{(۲٫۵)^{۳} \times ۳۶۵} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵}$$

اس لیے $ت^{۲} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵} \times د^{۳}$

زہرہ کے لیے $ت^{۲} = \frac{(۱۰)^{۳}}{(۲۵)^{۳} \times ۳۶۵} \times (۶۶۰)^{۳}$

$= \frac{(۶۶)^{۳} \times (۱۰)^{۶}}{۳۶۵ \times (۲۵)^{۳}} = \frac{(۶۶)^{۳} \times ۴^{۳}}{۳۶۵}$

اس لیے $ت = ۴ \times ۶۶ \times \sqrt{\frac{۲۶۴}{۳۶۵}}$

$= ۲۶۴ \times \sqrt{۰٫۷۲۳۳}$ تقریباً

$= ۲۶۴ \times ۰٫۸۵$

$= ۲۲۴٫۴$

اس لیے زہرہ کی گردش کا وقت تقریباً $۲۲۴\frac{۱}{۲}$ دن ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مقدار اس طرح بدلے جس طرح کہ دو یا زیادہ مقداروں کا حاصل ضرب تو ہم کہتے ہیں کہ پہلی مقدار بالاشتراک ایسے بدلتی ہے جیسے دوسری مقداریں۔

اگر ی بدلتا ہے بالاشتراک لا اور ما کے تو ی = م لا ما جہاں م مقدار مستقل ہے۔

مثلاً کسی رقم کا سود بدلتا ہے بالاشتراک اصل زر اور مدت اور شرح فی صدی کے۔

۳۴۔ **تعریف**۔ جب ی ایسے بدلے جیسے $\frac{لا}{ما}$ تو ہم یوں کہتے ہیں کہ ی بالراست ایسے بدلتا ہے جیسے لا اور بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے ما۔

۳۵۔ اگر ی $\propto$ لا جبکہ ما مستقل ہو اور ی $\propto$ ما جبکہ لا مستقل ہو تو ی $\propto$ لا ما جبکہ لا اور ما دونوں بدلیں۔

**ثبوت**۔ نظامِ ذیل میں متغیرات کی متناظر قیمتوں پر خیال کرو [ اس جگہ ی صرف لا اور ما پر موقوف ہے اور اگر ی $\propto$ لا جبکہ ما مستقل ہو اور

ی $\propto$ ما جبکہ لا مستقل ہو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ی $\propto$ لا ما جبکہ لا اور ما دونوں بدلیں]

| متغیر تابع | متغیر متبوع |
|---|---|
| ی<br>ی'<br>ی'' | لا، ما<br>لا'، ما<br>لا'، ما' |

اب چونکہ دونوں ی اور ی' کے جواب میں ما کی وہی قیمت ہے
اس لیے بموجب شرائط سوال $\frac{\text{ی}}{\text{ی}'} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}'}$

نیز چونکہ دونوں ی' اور ی'' کے جواب میں لا' کی وہی قیمت ہے،

اس لیے $\frac{\text{ی}'}{\text{ی}''} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}'}$

اب ان مساواتوں سے $\frac{\text{ی}}{\text{ی}'} \times \frac{\text{ی}'}{\text{ی}''} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}'} \times \frac{\text{ما}}{\text{ما}'}$

یعنی $\frac{\text{ی}}{\text{ی}''} = \frac{\text{لا ما}}{\text{لا}'\,\text{ما}'}$ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ی $\propto$ لا ما

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ی موقوف ہو $\text{لا}_1$، $\text{لا}_2$، $\text{لا}_3$ ..... $\text{لا}_n$ پر اور صرف انہیں مقادیر پر اور ی ایسا بدلتا ہو جیسا کہ ان مقادیر میں سے کوئی ایک مقدار جبکہ باقی مقادیر مستقل فرض کی جائیں تو

ی $\propto$ $\text{لا}_1 \times \text{لا}_2 \times \text{لا}_3 \times \ldots \times \text{لا}_n$ جب سب بدلیں

**۳۶**۔ دفعہ گزشتہ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی چند مثالیں ذیل میں مندرج ہیں۔

اگر مزدوروں کی تعداد معین ہو تو ان کے کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے ان دنوں کی تعداد جتنے دن انہوں نے کام کیا ہو اور کسی معینہ وقت میں کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے مزدوروں کی تعداد۔ اس لیے جب دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد دونوں بدلیں تو کام کی مقدار اس طرح بدلیگی جس طرح کہ دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد کا حاصل ضرب۔

علم ہندسہ میں مثلث کا رقبہ $\propto$ قاعدہ جبکہ ارتفاع مستقل ہو اور رقبہ $\propto$ ارتفاع جبکہ قاعدہ مستقل ہو۔ پس رقبہ $\propto$ قاعدہ × ارتفاع جبکہ قاعدہ اور ارتفاع دونوں بدلیں۔

مثال (۱) ایک قائم مخروط مستدیر کا حجم $\propto$ نصف قطر کا مربع جبکہ ارتفاع مستقل ہو اور $\propto$ ارتفاع جبکہ قاعدہ مستقل ہو۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر ۷ فٹ ہو اور ارتفاع ۱۵ فٹ تو حجم ۷۷۰ مکعب فٹ ہوتا ہے۔ ایک ایسے مخروط کا ارتفاع معلوم کرو جس کا حجم ۱۳۲ مکعب فٹ ہو اور جس کے قاعدہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو۔

فرض کرو کہ ع اور ر جداگانہ مخروط کے ارتفاع اور قاعدہ کے نصف قطر کو فٹوں میں تعبیر کرتے ہیں۔

بموجب مفروض $۷۷۰ = م \times ۷^۲ \times ۱۵$

جس سے $م = \frac{۲۲}{۲۱}$

اس لیے $حجم = \frac{۲۲}{۲۱} ر^۲ ع$

اس لیے حجم = ۱۳۲ اور ر = ۳ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$۱۳۲ = \frac{۲۲}{۲۱} \times ۹ \times ع$ جس سے $ع = ۱۴$

اس لیے ارتفاع مطلوب ۱۴ فٹ ہے۔

۳۷۔ دفعہ ۳۵ کے مسئلہ کی تعمیم اس صورت تک بھی کی جاسکتی ہے جبکہ ی کا تغیر دو سے زیادہ متغیروں پر منحصر ہو۔ مزید برآں تغیر بالراست

یا معکوس ہو سکتا ہے۔ یہ اصول دلچسپ ہے کیونکہ یہ طبعیات میں بکثرت
استعمال ہوتا ہے مثلاً گیسوں کے نظریہ میں تجربہ سے یہ معلوم کیا گیا ہے
کہ کسی گیس کا دباؤ د ایسے بدلتا ہے جیسے "مطلق تپش" ت جبکہ حجم ح
مستقل ہو اور دباؤ بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے حجم جبکہ تپش مستقل ہو
یعنی د $\propto$ ت جبکہ ح مستقل ہو۔

اور د $\propto \frac{1}{\text{ح}}$ جبکہ ت مستقل ہو۔

ان نتائج سے حاصل ہوتا ہے کہ جب ت اور ح دونوں بدلیں تو

د $\propto \frac{\text{ت}}{\text{ح}}$ یا دح = کِ ت جہاں کِ مستقل ہے اور تجربہ کرنے سے

اس کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال۔ ایک ریل کے سفر کی مدت بالراست ایسے بدلتی ہے
جیسے فاصلہ طے شدہ اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار اور
رفتار بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے ایک میل میں صرف شدہ کوئلہ کی مقدار
کا جذر اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے ڈبوں کی تعداد۔
۱۸ ڈبوں کے ساتھ نصف گھنٹہ میں ۲۵ میل طے کرنے کے لیے
۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کوئلہ صرف ہوتا ہے بتاؤ کہ ۱۶ ڈبوں کے ساتھ ۲۸ منٹ
میں ۲۱ میل کا سفر طے کرنے کے لیے کتنا کوئلہ درکار ہوگا۔

فرض کرو کہ ت تعبیر کرتا ہے وقت کو گھنٹوں میں۔
اور د " " بُعد کو میلوں میں
اور ر " " رفتار فی گھنٹہ میلوں میں
اور ق " " کوئلہ صرف شدہ فی میل ہنڈرڈ ویٹوں میں
اور ن ڈبوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

تو بموجب شرائط سوال

$$\text{ت} \propto \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

$$\text{اور} \quad \text{ر} \propto \frac{\sqrt{\text{ق}}}{\text{ن}}$$

$$\text{جس سے} \quad \text{ت} \propto \frac{\text{ن د}}{\sqrt{\text{ق}}}$$

$$\text{یا ت} = \frac{\text{ک ن د}}{\sqrt{\text{ق}}} \quad \text{جہاں ک مستقل ہے}$$

اس مساوات میں اوپر دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے (چونکہ $\text{ق} = \frac{۱۰}{۲۵}$)

$$\frac{۱}{۲} = \frac{\text{ک} \times ۱۸ \times ۲۵ \times ۵}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\text{یعنی ک} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۲۵ \times ۳۶}$$

$$\text{اس لیے ت} = \frac{\sqrt{۱۰}\ \text{ن د}}{۱۲۵ \times ۳۶\ \sqrt{\text{ق}}}$$

اب ت، ن، د کی قیمتیں جو سوال کے دوسرے حصّہ میں دی ہوئی ہیں درج کرنے سے

$$\frac{۲۸}{۹۰} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times \sqrt{۱۰}}{۱۲۵ \times ۳۶\ \sqrt{\text{ق}}}$$

$$\text{یعنی} \ \sqrt{\text{ق}} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times \sqrt{۱۰}}{۲۸ \times ۷۵} = \frac{۴}{۲۵}\sqrt{۱۰}$$

$$\text{جس سے ق} = \frac{۳۲}{۱۲۵}$$

اس لیے کوئلہ کی مقدار مطلوبہ $= \frac{۳۲ \times ۲۱}{۱۲۵} = ۵\frac{۴۷}{۱۲۵}$ ہنڈرڈ ویٹ

## امثلہ نمبری (۳)

۱- اگر لا ایسے بدلتا ہو جیسے ما اور لا = ۸ جبکہ ما = ۱۵ تو لا دریافت کرو۔

جبکہ ما = ۱۰

۲۔ اگر ف بالعکس ایسے بدلتا ہو جیسے ق اور ف = ۷ جبکہ ق = ۳
تو ف معلوم کرو جبکہ ق = ۲ ۱/۳

۳۔ اگر لا کا مربع ایسے بدلتا ہو جیسے ما کا مکعب اور لا = ۳ جبکہ ما = ۴
تو ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ لا = ۱/۲√۲

۴۔ ا ایسے بدلتا ہے جیسے ب اور ج بالاشتراک، اگر ا = ۲ جبکہ
ب = ۳/۵ اور ج = ۱۰/۲۷ تو ج کی قیمت معلوم کرو جبکہ ا = ۵۴ اور ب = ۳

۵۔ اگر ا ایسے بدلتا ہو جیسے ج اور ب ایسے بدلتا ہو جیسے ج
تو ا ± ب اور √اب ایسے بدلیں گے جیسے ج

۶۔ اگر ا ایسے بدلتا ہو جیسے ب ج تو ب بالعکس ایسے بدلیگا
جیسے ج/ا

۷۔ ف بالراست ایسے بدلتا ہے جیسے ق اور بالعکس ایسے
بدلتا ہے جیسے ر نیز ف = ۲/۳ جبکہ ق = ۳/۷ اور ر = ۹/۱۴ تو ق معلوم
کرو جبکہ ف = √۴۸ اور ر = √۷۵

۸۔ اگر لا ایسے بدلتا ہو جیسے ما تو ثابت کرو کہ لا^۲ + ما^۲ ایسے بدلیگا
جیسے لا^۲ ۔ ما^۲

۹۔ اگر ما ایسے بدلتا ہو جیسے دو مقادیر کا مجموعہ جن میں سے ایک
مقدار بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے لا اور دوسری بالعکس ایسے بدلتی ہے
جیسے لا اور اگر ما = ۶ جبکہ لا = ۴ اور ما = ۱/۳ ۲ جبکہ لا = ۳ تو لا اور ما کے
باہمی ربط کو مساوات کی صورت میں بیان کرو۔

۱۰۔ اگر ما دو ایسی مقادیر کے مجموعہ کے برابر ہو جن میں سے ایک
مقدار بالراست ایسے بدلتی ہو جیسے لا اور دوسری بالعکس ایسے بدلتی ہو
جیسے لا^۲ اور اگر ما = ۱۹ جبکہ لا = ۲ یا ۳ تو ما کو لا کی رقوم میں دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر ا بالراست ایسے بدلتا ہو جیسے ب کا جذر اور بالعکس ایسے
بدلتا ہو جیسے ج کا مکعب اور اگر ا = ۳ جبکہ ب = ۲۵۶ اور ج = ۲ تو ب

کی قیمت معلوم کرو جبکہ ل = ۲۴ اور ج = $\frac{۱}{۲}$

۱۲- یہ معلوم ہے کہ لا + ما ایسے بدلتا ہے جیسے ی + $\frac{۱}{ی}$ اور لا - ما ایسے بدلتا ہے جیسے ی - $\frac{۱}{ی}$ باہمی ربط لا اور ی کا دریافت کرو۔ بشرطیکہ ی = ۲ جبکہ لا = ۳ اور ما = ۱

۱۳- اگر ل بالاشتراک ایسے بدلتا ہے جیسے ب اور ج اور ب ایسے بدلتا ہو جیسے د$^{۲}$ اور ج بالعکس ایسے بدلے جیسے ل تو ثابت کرو کہ ل ایسے بدلتا ہے جیسے د۔

۱۴- اگر ما ایسے بدلتا ہے جیسے تین مقادیر کا مجموعہ جن میں سے پہلی مقدار مستقل ہے دوسری مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے لا اور تیسری ایسے بدلتی ہے جیسے لا$^{۲}$ اور اگر ما = ۰ جبکہ لا = ۱ اور ما = ۱ جبکہ لا = ۲ اور ما = ۴ جبکہ لا = ۳ تو ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ لا = ۷

۱۵- جب کہ ایک جسم حالتِ سکون سے گرتا ہے تو نقطۂ ابتدائی سے اس کا فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے مربع اس وقت کا جو اس نے گرنے میں صرف کیا۔ اگر ایک جسم $\frac{۱}{۲}$ ۴۰۲ مربع فٹ ۵ سکنڈ میں نیچے گرے تو دریافت کرو کہ ۱۰ سکنڈ میں وہ کتنا گرے گا۔ نیز معلوم کرو کہ دسویں سکنڈ میں وہ کتنا گرے گا؟

۱۶- کسی گولے کا حجم ایسے بدلتا ہے جیسے اس کے نصف قطر کا مکعب۔ جب نصف قطر $\frac{۱}{۲}$ ۳ فٹ ہو تو حجم $\frac{۲}{۳}$ ۱۷۹ مکعب فٹ ہوتا ہے۔ اگر نصف قطر ۱ فٹ ۹ انچ ہو تو حجم دریافت کرو۔

۱۷- کسی گول ٹکیا کا وزن ایسے بدلتا ہے جیسے اس کے نصف قطر کا مربع اگر موٹائی مستقل ہو اور ایسے بدلتا ہے جیسے موٹائی جبکہ نصف قطر مستقل ہو۔ دو ٹکیوں کی موٹائیوں کی باہمی نسبت ۹ : ۸ ہے اگر پہلی ٹکیا کا وزن دوسری کے وزن کا دو چند ہو تو ان کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۸- ایک کشتیوں کی دوڑ کی تقریب پر کسی ایک دن میں دوڑوں کی

تعداد بالاشتراک ایسے بدلتی ہے جیسے دنوں کی تعداد شروع تقریب سے اُس دن تک اور دنوں کی تعداد آخر تقریب سے اس دن تک جبکہ ہر دو صورتوں میں زیرِ بحث دن کو شامل کیا جائے۔ تین دنوں میں بالترتیب ۶، ۵، ۳ دوپہریں ہوئیں معلوم کرو کہ یہ کون سے دن تھے اور تقریب کتنے دن رہی ؟

**۱۹**- کسی ہیرے کی قیمت اس کے وزن کے مربع کے موافق بدلتی ہے۔ تین سونے کی انگوٹھیاں جن میں سے ہر ایک میں ایک ایک ہیرا جڑا ہوا ہے وزن میں برابر ہیں۔ انگوٹھیوں کی قیمتیں جداگانہ ا پونڈ، ب پونڈ، ج پونڈ ہیں اور ان کے ہیروں کے وزن بالترتیب ۳، ۴، ۵ رتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک رتی ہیرے کی قیمت $\left( \frac{ا + ج}{۲} - ب \right)$ پونڈ ہے بشرطیکہ سب انگوٹھیوں کی تیاری کی مزدوری یکساں ہو۔

**۲۰**- دو شخصوں کے وظیفے ان کی مدتِ ملازمت کے جذر کے متناسب ہیں، ایک نے دوسرے کی نسبت ۹ سال زیادہ ملازمت کی ہے اور اس کا وظیفہ دوسرے کے وظیفہ سے ۵۰ روپیہ زیادہ ہے۔ اگر پہلے شخص کی مدت ملازمت دوسرے کی مدتِ ملازمت سے $۴\frac{۱}{۴}$ سال زیادہ ہوتی تو ان کے وظیفوں میں نسبت ۹ : ۸ ہوتی معلوم کرو کہ انھوں نے کتنے سال ملازمت کی ہے اور ان کے وظیفے جُداگانہ کیا ہیں ؟

**۲۱**- کسی سیارہ کی کشش اپنے چاندوں پر بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے سیارہ کی مقدارِ مادہ م اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ 'د' کا مربع۔ نیز کسی چاند کی مدتِ گردش کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے فاصلہ اور بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے قوتِ جاذبہ۔ اگر م، د، ت کی متناظر قیمتیں $م_۱$، $د_۱$، $ت_۱$ اور $م_۲$، $د_۲$، $ت_۲$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_۱ ت_۱^۲}{م_۲ ت_۲^۲} = \frac{د_۱^۳}{د_۲^۳}$$

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے مشتری (جیپٹر) کے اُس چاند کی

مدتِ گردش معلوم کرو جس کے فاصلے ہمارے چاند کے فاصلے سے نسبت ۳۵ : ۳۱ ہے اور یہ معلوم ہے کہ مشتری کی مقدارِ مادہ زمین کی مقدارِ مادہ کا ۳۴۳ گنا ہے اور ہمارے چاند کی مدت گردش ۲۷۶۳۲ دن ہے۔

۲۲۔ کسی انجن میں کوئلہ کا خرچ رفتار کے مربع کے موافق بدلتا ہے جب رفتار ۱۶ میل فی گھنٹہ ہو تو ایک گھنٹہ میں ۲ ٹن کوئلہ صرف ہوتا ہے اگر ایک ٹن کوئلہ کی قیمت ۱۰ شلنگ ہو اور انجن پر دوسرے اخراجات ۱۱ شلنگ ۳ پنس فی گھنٹہ ہوں تو ۱۰۰ میل سفر کا کم سے کم خرچ دریافت کرو۔

# باب چہارم

## سلسلۂ حسابیہ

**۳۸- تعریف**۔ کسی فرق مشترک سے گھٹنے یا بڑھنے والے سلسلۂ مقادیر کو سلسلۂ حسابیہ کہتے ہیں۔ اس قسم کے سلسلہ میں ہر ایک رقم، رقمِ ماقبل پر ایک مستقل مقدار (خواہ یہ مقدار مثبت ہو یا منفی) زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اس مستقل مقدار کو فرق عام یا فرقِ مشترک کہتے ہیں۔

فرق مشترک = دوسری رقم - پہلی رقم = تیسری رقم - دوسری رقم

= چوتھی رقم - تیسری رقم او علیٰ ہذا القیاس۔

۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ........ سلسلہ حسابیہ ہے جس کا فرقِ مشترک ۴ ہے

۸، ۲، -۴، -۱۰، ........ 〃 〃 〃 〃 -۶ 〃

لا، ۵لا، ۹لا، ۱۳لا، ........ 〃 〃 〃 〃 ۴لا 〃

ا، ا+ف، ا+۲ف، ا+۳ف، 〃 〃 〃 〃 +ف 〃

**۳۹**- کسی سلسلۂ حسابیہ کی ن ویں رقم دریافت کرو جبکہ اس کی رقم اول اور فرقِ مشترک معلوم ہوں۔

اگر سلسلۂ ا، ا+ف، ا+۲ف، ا+۳ف، ........ کا بغور ملاحظہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ ہر ایک رقم میں ف کا سر تعدادِ ارقام سے جو اس رقم تک ہو بقدر ایک کے کم ہے مثلاً

تیسری رقم = ا + ۲ ف
چوتھی ″ = ا + ۳ ف
بیسویں ″ = ا + ۱۹ ف
اور بالعموم ع ویں رقم = ا + (ع - ۱) ف

اگر رقموں کی کل تعداد ن ہو اور خ سے آخری رقم تعبیر کی جائے
تو خ = ا + (ن - ۱) ف ............ (۱)

مثال (۱) سلسلہ ۱۰، ۸، ۶، ۴ ...... کی ۱۹ ویں رقم دریافت کرو۔
پہلی رقم = ۱۰ اور فرق مشترک = -۲
اس لیے ۱۹ ویں رقم = ۱۰ + (۱۹ - ۱) × (-۲) = ۱۰ - ۱۸ × ۲ = -۲۶

مثال (۲) سلسلۂ ۵، ۷، ۹، ۱۱، وغیرہ، کی کونسی رقم ۲۵ کے برابر ہے؟
فرض کرو کہ سلسلہ کی ر ویں رقم رقمِ مطلوبہ ہے۔
تب ۲۵ = ۵ + (ر - ۱) × ۲ = ۳ + ۲ ر جس سے ر = ۱۱
پس معلوم ہوا کہ سلسلۂ معلومہ کی گیارھویں رقم = ۲۵

مثال (۳) کسی سلسلۂ حسابیہ میں کل ۲۵ رقمیں ہیں آخری رقم ۷۵ ہے اور فرق مشترک ۳ اس کی پہلی رقم دریافت کرو۔ جواب ۳

مثال (۴) ثابت کرو کہ کسی سلسلۂ حسابیہ میں شروع اور آخر سے دو متساوی الفصل رقموں کا مجموعہ پہلی اور آخری رقم کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

۴۴۔ سلسلۂ حسابیہ میں متعدد ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ا = رقمِ اول، ف = فرق مشترک، ن = تعدادِ ارقام
خ = آخری رقم اور ص = ن ارقام کا حاصل جمع تب
ص = ا + (ا + ف) + (ا + ۲ ف) + ...... + (خ - ۲ ف) + (خ - ف) + خ
اگر اس سلسلے کی ترتیب الٹ دی جائے تو
ص = خ + (خ - ف) + (خ - ۲ ف) + ...... + (ا + ۲ ف) + (ا + ف) + ا
دونوں سلسلوں کو جمع کرنے سے

۲ ص = (ا + خ) + (ا + خ) + ..... ن رقموں تک = ن (ا + خ)

∴ ص = $\frac{ن}{۲}$ (ا + خ) ........................ (۱)

نیز خ = رقم آخر = ا + (ن - ۱) ف

اس لیے ص = $\frac{ن}{۲}$ { ۲ ا + (ن - ۱) ف } ........................ (۲)

۴۱ - دفعۂ ماقبل میں (۱) اور (۲) دو کارآمد ضابطے ہیں۔ ان میں سے کسی میں کوئی ایک حرف نامعلوم مقدار کو تعبیر کر سکتا ہے جبکہ باقی تین مقداریں دی ہوئی ہوں، مثلاً اگر ضابطہ (۱) میں ص، ن، خ کے لیے معلومہ قیمتیں درج کی جائیں تو ا معلوم کرنے کے لیے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح دوسری مساواتوں میں۔ لیکن ان ضابطوں کو صرف زبانی یاد رکھ کر استعمال نہیں کرنا چاہیے بلکہ ابتدائی اصول سے ہر سوال کو حل کرنے کی کوشش کرنا مفید ہوگا۔

مثال (۱) سلسلہ $\frac{۱}{۲}$۵، $\frac{۳}{۴}$۶، ۸ وغیرہ کی ۱۷ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

س مثال میں ا = $\frac{۱}{۲}$۵، ف = $\frac{۱}{۴}$۱ اور ن = ۱۷ نتیجہ مندرجۂ بالا (۲) سے

ص = $\frac{۱۷}{۲}$ { ۲ × $\frac{۱۱}{۲}$ + ۱۶ × $\frac{۵}{۴}$ } = $\frac{۱۷}{۲}$ (۱۱ + ۲۰)

= $\frac{۱۷ × ۳۱}{۲}$ = $\frac{۱}{۲}$۲۶۳

مثال (۲) سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ..... کا مجموعہ ۱۰۰ رقموں تک دریافت کرو۔

سلسلہ کی آخری رقم = ۱۰۰

اس لیے مجموعہ مطلوبہ = $\frac{۱۰۰}{۲}$ (۱ + ۱۰۰) = ۵۰ × ۱۰۱ = ۵۰۵۰

مثال (۳) کسی سلسلۂ حسابیہ کی ۵ رقموں کا مجموعہ ۳۵ ہے اس کی رقم متوسط دریافت کرو۔

سلسلۂ حسابیہ کی پانچ رقموں کے مجموعہ کو نہایت مختصر صورت میں

لانے کے لیے اِن ارقام کو اس طرح لکھو۔

ا - ۲ ف، ا - ف، ا، ا + ف، ا + ۲ ف

اس صورت میں ۵ ا = مجموعہ = ۳۵ اس لیے رقم متوسط = ا = ۷

مثال (۴) ایک سلسلہ کی پہلی رقم ۵ آخری رقم ۴۵ اور حاصل جمع ۴۰۰ ہے، کل رقموں کی تعداد اور فرق مشترک معلوم کرو۔

اگر تعداد ارقام ن ہو تو ضابطہ ص = ن/۲ (ا + خ) سے

جہاں ص حاصل جمع ہے اور خ آخری رقم ۴۰۰ = ن/۲ (۵ + ۴۵)

∴ ن = ۱۶

اگر فرقِ مشترک ف ہو تو ۴۵ = ۱۶ ویں رقم = ۵ + ۱۵ ف

∴ ف = ۲ ۲/۳

۴۲۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی دو رقمیں معلوم ہوں تو سلسلہ مکمل طور پر معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ معطیات سے ہمیں دو ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں جن کو حل کرنے سے پہلی رقم اور فرقِ مشترک معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال۔ سلسلۂ حسابیہ کی ۵۴ ویں اور چوتھی رقمیں بالترتیب -۶۱ اور ۶۴ ہیں، ۲۳ ویں رقم معلوم کرو۔

اگر ا پہلی رقم ہو اور ف فرقِ مشترک تو

-۶۱ = ۵۴ ویں رقم = ا + ۵۳ ف

۶۴ = چوتھی رقم = ا + ۳ ف

جس سے معلوم ہوا کہ ف = -۵/۲ اور ا = ۷۱ ½

اور ۲۳ ویں رقم = ا + ۲۲ ف = ۱۶ ½

## ۴۳۔ اوساط حسابیہ

تعریف ۱۔ جب تین مقادیر سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا اوسط حسابی کہتے ہیں۔ مثلاً ۵ اوسط حسابی ہے

۳ اور ۷ کے درمیان ۵ اوسط حسابی ہے ا-ف، ا+ف کے درمیان۔

۴۴۔ دو مقادیر معلومہ ا اور ب کا اوسط حسابی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا اوسط حسابی ہے اس لیے ا، لا، ب سلسلۂ حسابیہ میں ہیں

لا - ا = ب - لا یعنی ۲ لا = ا + ب

$$\therefore \quad \text{لا} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲}$$

مثال۔ $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۱}{۲}$ کا اوسط حسابی $= \frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{۳}{۸}$

۴۵۔ کسی دو مقداروں کے درمیان ایسی رقموں کی کوئی تعداد درج کرنا ممکن ہے کہ اس طرح سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے وہ سلسلۂ حسابیہ ہو اور دفعہ ۴۳ کی تعریف کی توسیع سے اس طرح درج کی ہوئی رقموں کو اواسط حسابیہ کہتے ہیں۔

۴۶۔ دو مقادیر معلومہ کے درمیان متعدد اواسط حسابیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ب دی ہوئی مقداریں ہیں اور ان کے درمیان ن اواسط حسابیہ مندرج کرنی ہیں۔ اگر ا اور ب کو بھی شامل کیا جائے تو ارقام مع ن اواسط حسابیہ کے ن + ۲ ہونگی۔ اب ہمیں ایک ایسا سلسلۂ حسابیہ معلوم کرنا ہے جس میں ن + ۲ ارقام ہوں اور جس کی پہلی ا اور آخری رقم ب ہو

اگر فرقِ مشترک = ف تو ب = (ن + ۲) ویں رقم

= ا + (ن + ۱) ف

$$\therefore \quad \text{ف} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن} + ۱}$$

اس لیے اواسط مطلوبہ ہیں $\text{ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن} + ۱}$، $\text{ا} + \frac{۲(\text{ب} - \text{ا})}{\text{ن} + ۱}$،

$\text{ا} + \frac{۳(\text{ب} - \text{ا})}{\text{ن} + ۱}$، ......... $\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ب} - \text{ا})}{\text{ن} + ۱}$

**مثال (۱)** ۴ اور ۶۷ کے درمیان ۲۰ اواسط حسابیہ مندرج کرو۔
یہاں تعداد ارقام ۲۲ ہے اس لیے ۶۷ = ۴ + ۲۱ ف اگر ف فرقِ مشترک ہو
∴ ف = ۳ اور سلسلہ ۴، ۷، ۱۰، ....، ۶۱، ۶۴، ۶۷ ہے۔
اس لیے اواسط مطلوبہ ۷، ۱۰، ۱۳، ....، ۶۱، ۶۴ ہیں۔

**مثال (۲)** سلسلۂ حسابیہ کی تین رقموں کا مجموعہ ۲۷ ہے اور اُن کے مربعوں کا مجموعہ ۲۹۳ ہے۔ رقمیں دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ا درمیانی رقم ہے اور ف فرقِ مشترک ہے۔ پس تین رقمیں ہونگی ا - ف، ا، ا + ف
لہٰذا ا - ف + ا + ا + ف = ۲۷ جس سے ا = ۹ اور مطلوبہ ارقام ہیں ۹ - ف، ۹، ۹ + ف
∴ (۹ - ف)$^2$ + ۹$^2$ + (۹ + ف)$^2$ = ۲۹۳ جس سے حاصل ہوتا ہے
ف = ± ۵ یعنی ارقام مطلوبہ ہیں ۴، ۹، ۱۴

**مثال (۳)** اس سلسلۂ حسابیہ کی ع رقموں کا مجموعہ معلوم کرو جس کی ن ویں رقم ۳ن - ۱ ہے ن = ۱ اور ن = ع رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ
رقم اول = ۲، آخری رقم = ۳ع - ۱
∴ مجموعہ = $\frac{\text{ع}}{۲}$ (۲ + ۳ع - ۱) = $\frac{\text{ع}}{۲}$ (۳ع + ۱)

## امثلہ نمبری ۴ (ا)

۱۔ سلسلہ ۲، ۳$\frac{1}{4}$، ۴$\frac{1}{2}$ وغیرہ کا حاصل جمع ۲۰ رقموں تک دریافت کرو۔
۲۔ 〃 ۴۹، ۴۴، ۳۹ 〃 〃 ۱۷ 〃 〃 〃
۳۔ 〃 $\frac{3}{4}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{7}{12}$ 〃 〃 ۱۹ 〃 〃 〃
۴۔ 〃 ۳، $\frac{7}{3}$، ۱$\frac{2}{3}$ 〃 〃 ن 〃 〃 〃
۵۔ 〃 ۳٫۷۵، ۳٫۵، ۳٫۲۵، ..... کا حاصل جمع ۱۶ 〃 〃

۶۔ سلسلہ ۔ $\frac{1}{4}$۷، ۔۷، ۔ $\frac{1}{2}$۶، ..... وغیرہ کا حاصل جمع ۲۴ رقموں تک دریافت کرو۔

۷۔ " ۳ء۱، ۔۱ء۳، ۔۵ء۷، ... " " ۱۰ " " "

۸۔ " $\frac{6}{3!}$، ۳، $2!$، $\frac{12}{3!}$ ..... " " ۵۰ " " "

۹۔ " $\frac{3}{5!}$، $\frac{4}{5!}$، $5!$، ..... " " ۲۵ " " "

۱۰۔ " ا-۳ب، ۲ا-۵ب، ۳ا-۷ب ..... " ۴۰ " " "

۱۱۔ " ۲ا-ب، ۴ا-۳ب، ۶ا-۵ب ..... " ن " " "

۱۲۔ " $\frac{ا+ب}{2}$، ا، $\frac{3ا-ب}{2}$ ..... " ۲۱ " " "

۱۳۔ ۱۹ اوساط حسابیہ $\frac{1}{4}$ اور ۔ $\frac{3}{4}$۹ کے درمیان مندرج کرو۔

۱۴۔ ۱۷ " $\frac{1}{2}$۳ اور ۔ $\frac{1}{2}$۴۱ " " "

۱۵۔ ۱۸ " ۔۳۵ لا " ۳ لا " "

۱۶۔ لا " $\frac{1}{لا}$ " ۱ " " "

۱۷۔ پہلے ن طاق طبعی اعداد کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۸۔ کسی سلسلۂ حسابیہ میں پہلی رقم = ۲، آخری رقم = ۲۹ اور مجموعہ = ۱۵۵ فرق مشترک معلوم کرو۔

۱۹۔ سلسلۂ حسابیہ کی ۱۵ رقموں کا مجموعہ ۶۰۰ ہے اور فرق مشترک ۵ ہے رقم اول معلوم کرو۔

۲۰۔ سلسلۂ حسابیہ کی تیسری رقم ۱۸ ہے اور ساتویں رقم ۳۰ ہے ۱۷ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۱۔ تین اعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع = ۲۷ اور اُن کا حاصل ضرب = ۵۰۴ انھیں معلوم کرو۔

۲۲۔ تین اعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اُن کا حاصل جمع ۱۲ ہے اور اُن کے مکعبوں کا حاصل جمع ۴۰۸ ہے اُنہیں دریافت کرو۔

۲۳- کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ۴ن + ۱ ہے اس کی ۱۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۴- کسی سلسلہ کی ع ویں رقم $\frac{\text{ع}}{\text{۲}}$ + ۲ ہے اُس کی ۳۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۵- کسی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{\text{ن}}{\text{ا}}$ + ب ہے اس کی ع رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۶- سلسلہ $\frac{\text{۲ا}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\text{ا}}$ ، ۴ا - $\frac{\text{۳}}{\text{ا}}$ ، $\frac{\text{۶ا}^{\text{۲}}-\text{۵}}{\text{ا}}$ ، وغیرہ کا ن رقموں تک مجموعہ دریافت کرو۔

۴۷- اگر کسی سلسلۂ حسابیہ میں ص، ا، ف کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ن کی قیمت دریافت کرنے کے لیے ہمیں ایک مساوات درجۂ دوم حل کرنی پڑتی ہے اور وہ یہ ہے۔

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{۲}}\left\{\text{۲ا} + (\text{ن} - \text{۱})\,\text{ف}\right\}$$

$$\text{یا}\quad \text{۲ص} = \text{۲ان} + \text{فن}^{\text{۲}} - \text{فن}$$

$$\text{یا}\quad \text{ن}^{\text{۲}} + \frac{\text{۲ا} - \text{ف}}{\text{ف}}\,\text{ن} = \frac{\text{۲ص}}{\text{ف}}$$

یہ ایک مساوات درجۂ دوم ہے جس کی دو اصلیں ہیں۔ اگر دونوں مثبت اور صحیح عدد ہوں تو ہر ایک اصل کے جواب میں نتیجہ کی تعبیر مشکل امر نہیں ہے۔ اگر ن منفی ہو تو بھی بعض صورتوں میں مناسب تعبیر ممکن ہے۔

مثال۔ کتنی رقمیں سلسلہ -۹، -۶، -۳، ..... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۶۶ ہو؟

$$\text{یہاں}\quad \frac{\text{ن}}{\text{۲}}\left\{-\text{۱۸} + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{۳}\right\} = \text{۶۶}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ن}^{\text{۲}} - \text{۷ن} - \text{۴۴} = \text{۰}\quad \text{یا}\quad (\text{ن} - \text{۱۱})(\text{ن} + \text{۴}) = \text{۰}$$

∴ ن = ۱۱ یا -۴ اگر ہم سلسلہ کی ۱۱ رقمیں لیں یعنی

-۹، -۶، -۳، ۰، ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، تو صریحاً ان کا حاصل جمع ۶۶ ہے، اگر ہم آخری رقم سے شروع کریں اور پیچھے کی طرف ۴ رقمیں گنیں تو بھی حاصل جمع ۶۶ ہے، اس سے معلوم ہوا کہ اگرچہ ن کی منفی قیمت ہمارے سوال کا پورا جواب نہیں ہے مگر پھر بھی اسے ہم قابل فہم معنی دے سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ذیل سے ظاہر ہے۔

۴۸- اس نتیجہ کی تحقیق صورت عامہ میں اس طرح ہو سکتی ہے
ن کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مساوات ذیل ہے:

ف ن$^2$ + (۲ ا - ف) ن - ۲ ص = ۰ ......... (۱)

اس سے ہمیں ن کی دو قیمتیں ملینگی۔ چونکہ فی الحال زیر بحث وہی عمل ہے جس میں ن کی ایک قیمت مثبت ہے دوسری منفی۔ ہم ان کو ن$_1$ اور - ن$_2$ سے تعبیر کرینگے۔

سلسلہ کی ن$_1$ ویں رقم = ا + (ن$_1$ - ۱) ف

اگر ہم اس رقم سے شروع ہو کر پیچھے کی طرف گنیں تو فرقِ عام - ف ہوگا اور ن$_2$ ارقام کا مجموعہ

= $\frac{\text{ن}_2}{2}$ {۲ (ا + $\overline{\text{ن}_1 - 1}$ ف) + (ن$_2$ - ۱)(-ف)}

اب ہم ثابت کرینگے کہ یہ ص کے برابر ہے۔

جملہ = $\frac{\text{ن}_2}{2}$ {۲ ا + (۲ ن$_1$ - ن$_2$ - ۱) ف}

= $\frac{1}{2}$ {۲ ا ن$_2$ + ۲ ن$_1$ ن$_2$ ف - ن$_2$ (ن$_2$ + ۱) ف}

= $\frac{1}{2}$ {۲ ن$_1$ ن$_2$ ف - (ف ن$_2^2$ - $\overline{\text{۲ ا - ف}}$ × ن$_2$)}

= $\frac{1}{2}$ (۴ ص - ۲ ص) = ص کیونکہ ن$_1$ مساوات

ف ن$^2$ + (۲ ا - ف) ن - ۲ ص = ۰ کی ایک اصل ہے اور - ن$_1$ ن$_2$ اس مساوات کی دونوں اصلوں کا حاصلِ ضرب ہے۔

**۴۹**- اگر ن کی قیمت کسری ہو تو اس حل کے مطابق رقموں کی کوئی تعداد شرائط سوال کو پورا نہیں کریگی۔

**مثال**- کتنی رقمیں سلسلہ ۲۶، ۲۱، ۱۶، ...... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۷۴ ہو؟

یہاں $\frac{\text{ن}}{2}\left\{52+(\text{ن}-1)(-5)\right\}=74$

یعنی $5\,\text{ن}^2-57\,\text{ن}+148=0$

یا $(\text{ن}-4)(5\,\text{ن}-37)=0$

$\therefore$ $\text{ن}=4$ یا $\frac{37}{5}$، یہاں تعداد ارقام ۴ ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ اگر ۷ رقمیں سلسلہ کی لی جائیں تو حاصل جمع ۷۴ سے زیادہ ہے اور اگر ۸ لی جائیں تو کم۔

**۵۰**- ہم اس جگہ سلسلۂ حسابیہ کی چند متفرق مثالیں دینگے۔

**مثال (۱)** دو حسابی سلسلوں کی ن رقموں کے مجموعوں کی باہمی نسبت $7\,\text{ن}+1 : 4\,\text{ن}+27$ ہے، ان کی ۱۱ ویں رقموں کی نسبت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دونوں سلسلوں کی پہلی رقمیں اور فرق مشترک بالترتیب $\text{ا}_1$، $\text{ف}_1$ اور $\text{ا}_2$، $\text{ف}_2$ ہیں۔

بموجب شرائط سوال $\frac{2\,\text{ا}_1+(\text{ن}-1)\text{ف}_1}{2\,\text{ا}_2+(\text{ن}-1)\text{ف}_2}=\frac{7\,\text{ن}+1}{4\,\text{ن}+27}$ اب ہمیں $\frac{\text{ا}_1+10\,\text{ف}_1}{\text{ا}_2+10\,\text{ف}_2}$ کی قیمت معلوم کرنی ہے۔ اس لیے $\text{ن}=21$ رکھنے سے حاصل ہوگا $\frac{2\,\text{ا}_1+20\,\text{ف}_1}{2\,\text{ا}_2+20\,\text{ف}_2}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}$ پس نسبت مطلوبہ ۴ : ۳ ہے۔

**مثال (۲)** اگر $\text{ص}_1$، $\text{ص}_2$، $\text{ص}_3$، ....، $\text{ص}_\text{پ}$ ایسے حسابی سلسلوں کی ن رقموں کے مجموعے ہوں جن کی پہلی رقمیں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ....

ہیں اور فرق مشترک ۱، ۳، ۵، ۷، ۔۔۔۔۔ ہیں تو ص۱ + ص۲ + ص۳ + ۔۔۔۔۔۔ + صپ کی قیمت دریافت کرو۔

$$ص_۱ = \frac{ن}{۲}\left\{۲ + (ن-۱)\right\} = \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

$$ص_۲ = \frac{ن}{۲}\left\{۴ + (ن-۱)۳\right\} = \frac{ن(۳ن+۱)}{۲}$$

$$ص_۳ = \frac{ن}{۲}\left\{۶ + (ن-۱)۵\right\} = \frac{ن(۵ن+۱)}{۲}$$

$$ص_پ = \frac{ن}{۲}\left\{۲پ + (ن-۱)(۲پ-۱)\right\} = \frac{ن}{۲}\left\{(۲پ-۱)ن + ۱\right\}$$

$$\text{اس لیے مجموعہ مطلوبہ} = \frac{ن}{۲}\left\{(ن+۱) + (۳ن+۱) + \cdots + (\overline{۲پ-۱} \times ن + ۱)\right\}$$

$$= \frac{ن}{۲}\left\{(ن + ۳ن + ۵ن + \cdots + \overline{۲پ-۱} \times ن) + پ\right\}$$

$$= \frac{ن}{۲}\left\{ن(۱ + ۳ + ۵ + \cdots + \overline{۲پ-۱}) + پ\right\}$$

$$= \frac{ن}{۲}(ن پ^۲ + پ) = \frac{ن پ}{۲}(ن پ + ۱)$$

# امثلہ نمبری ۴ (ب)

۱- معلوم ہے ا = -۲، ف = ۴، ص = ۱۶۰ دریافت کرو ن -

۲- کتنی ارقام سلسلہ ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۔۔۔۔۔ کی لی جائیں کہ مجموعہ ۲۰۸ کے برابر ہو؟

۳- کسی سلسلۂ حسابیہ میں تیسری رقم پہلی رقم کی چار گنی ہے اور چھٹی رقم ۱۷ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۴- کسی سلسلۂ حسابیہ کی دوسری، ۳۱ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب

$\frac{3}{4}$، $\frac{1}{2}$، ۔ $\frac{1}{2}$ ۶ ہیں۔ رقم اول اور تعداد ارقام دریافت کرو۔

۵۔ کسی سلسلۂ حسابیہ کی چوتھی، ۴۲ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب ۰، ۔ ۹۵، ۔ ۱۲۵ ہیں پہلی رقم اور کل تعداد ارقام دریافت کرو۔

۶۔ ایک شخص پر ۳۶۰۰ روپیہ قرض ہے وہ اُسے ۴۰ قسطوں میں ادا کرنا چاہتا ہے جو کہ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں ۳۰ قسطیں ادا کرنے کے بعد وہ فوت ہو گیا اور اس کے قرض کا ایک تہائی حصہ ادا کرنا باقی رہا۔ پہلی قسط کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ دو اعداد کا مجموعہ $\frac{1}{6}$ ۲ ہے ان کے درمیان اواسط حسابیہ کی جفت تعداد مندرج کی گئی ہے اواسط کا مجموعہ ان کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔ اواسط کی تعداد معلوم کرو۔

۸۔ سلسلہ ۲، ۵، ۸، ...... کی ن ارقام کا مجموعہ ۹۵۰ ہے۔ ن کی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ سلسلہ $\frac{1}{1+\sqrt{ل}}$، $\frac{1}{1-ل}$، $\frac{1}{1-\sqrt{ل}}$، ..... کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۰۔ اگر ۷ رقموں کا مجموعہ ۴۹ ہو اور ۱۷ رقموں کا ۲۸۹ تو ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر سلسلۂ حسابیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں رقمیں بالترتیب ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

(ق ۔ ر) ا + (ر ۔ پ) ب + (پ ۔ ق) ج = ۰

۱۲۔ ایک سلسلۂ حسابیہ کی ف رقموں کا مجموعہ ق ہے اور ق رقموں کا مجموعہ ف ہے تو ف + ق رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

۱۳۔ چار اعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۲۴ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۹۴۵ انہیں دریافت کرو۔

۱۴۔ ۲۰ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو جو سلسلۂ حسابیہ میں ہوں

اور پہلے اور چوتھے حصہ کے حاصل ضرب کو دوسرے اور تیسرے کے حاصل ضرب
سے نسبت ۲ : ۳ کی ہو۔

۱۵۔ کسی سلسلۂ حسابیہ کی پ ویں رقم ق ہے اور ق ویں رقم پ ہے
اس کی م ویں رقم دریافت کرو۔

۱۶۔ کتنی رقمیں سلسلہ ۹، ۱۲، ۱۵،..... کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۳۰۶ ہو؟

۱۷۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی ن ارقام کا مجموعہ ۲ ن + ۳ ن$^{۲}$ ہو تو اس کی
ر ویں رقم دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی ن ارقام کے مجموعہ کو ن ارقام کے مجموعہ سے
نسبت م$^{۲}$ : ن$^{۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ م ویں رقم کو ن ویں رقم سے نسبت ۲م - ۱ : ۲ن - ۱ ہوگی۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ کسی سلسلۂ حسابیہ کی طاق رقموں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے
درمیانی رقم اور تعداد رقوم کے حاصل ضرب کے۔

۲۰۔ اگر ن کی تمام قیمتوں کے لیے ص = ن (۵ ن - ۳) تو پ ویں رقم
دریافت کرو۔

۲۱۔ کسی سلسلۂ حسابیہ کی تعداد ارقام جفت ہے۔ طاق رقموں کا مجموعہ ۲۴ ہے
اور جفت رقموں کا ۳۰ اور آخری رقم رقم اول سے بقدر $\frac{1}{2}$ ۱۰ کے زیادہ ہے۔
تعدادِ ارقام دریافت کرو۔

۲۲۔ دو مختلف نظام اعداد ہیں ہر ایک میں تین ارقام ہیں جو سلسلۂ حسابیہ
میں ہیں۔ اور ہر ایک کا مجموعہ ۱۵ ہے۔ پہلے نظام کا فرق مشترک دوسرے
نظام کے فرق مشترک سے بقدر ایک کے زیادہ ہے اور پہلے نظام کے حاصل
ضرب کو دوسرے نظام کے حاصل ضرب سے نسبت ۷ : ۸ کی ہے۔ اعداد دریافت کرو۔

۲۳۔ لا اور ۲ ما کا ر واں اواسط حسابی ۲ لا اور ما کے ر ویں اواسط حسابی
کے برابر ہے جبکہ ہر ایک صورت میں ن اواسط حسابیہ مندرج کی جائیں
لا اور ما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی پ رقموں کا مجموعہ ق رقموں کے مجموعہ کے
برابر ہو تو ثابت کرو کہ پ + ق ارقام کا مجموعہ صفر ہے۔

# باب پنجم

## سلسلۂ ہندسیہ

۵۱ - **تعریف** - جب کسی سلسلۂ مقادیر کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل اور کسی مستقل جزوِ ضربی کے حاصلِ ضرب کے برابر ہو تو ایسے سلسلے کو **سلسلۂ ہندسیہ** کہتے ہیں۔

اس جزوِ ضربی کو **نسبت مشترک** کہتے ہیں اور کسی رقم کو اس کی رقم ماقبل پر تقسیم کرنے سے اس کو معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً ۳، ۱۲، ۴۸، ۱۹۲، ...... ایک سلسلۂ ہندسیہ ہے جس کی نسبت مشترک ۴ ہے

۱، $-\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$، $-\frac{۱}{۲۷}$، ...... " " " " " $-\frac{۱}{۳}$ "

۲۰، ۱۰، ۵، ...... " " " " " $\frac{۱}{۲}$ "

ا، ار، ار$^۲$، ار$^۳$ ...... " " " " " ر "

۵۲ - اگر رقم اول اور نسبت مشترک معلوم ہوں تو سلسلۂ ہندسیہ کی ن ویں رقم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا رقم اول ہے اور ب نسبت مشترک

سلسلہ ا، اب، اب$^۲$، اب$^۳$ ...... کا بغور ملاحظہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ کسی رقم میں ب کا قوت نما تعداد ارقام سے جو اُس رقم تک ہو بقدر ایک کے کم ہے۔

مثلاً تیسری رقم = اب$^۲$

چھٹی رقم = $ا ب^{۵}$

۲۰ ویں رقم = $ا ب^{۱۹}$

ع ویں رقم = $ا ب^{ع-۱}$

اور بالعموم

اگر ن = تعداد ارقام اور خ = آخری رقم

تو خ = $ا ب^{ن-۱}$

**۵۳- تعریف**- جب تین مقادیر سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا **اوسط ہندسی** کہتے ہیں۔

دو مقادیر کا اوسط ہندسی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقادیر ہیں اور ھ ان کا اوسط ہندسی ہے

اب چونکہ ا، ھ، ج سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔

اس لیے $\frac{ھ}{ا} = \frac{ج}{ھ}$ یا $ھ^{۲} = ا ج$

یا $ھ = \sqrt{ا ج}$

یعنی دو مقادیر کا اوسط ہندسی اُن کے حاصل ضرب کے جذر کے برابر ہے۔

۵۴- دو دی ہوئی مقداروں کے درمیان متعدد اواسط ہندسیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقداریں ہیں اور ن اواسط ہندسیہ کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔ سلسلہ کی کل تعداد ارقام = ن + ۲

پس ہمیں ایک ایسا سلسلۂ ہندسیہ معلوم کرنا ہے جس کی پہلی رقم ا ہو اور آخری رقم ج۔ اگر نسبت مشترک کو ب سے تعبیر کریں تو

ج = (ن + ۲) ویں رقم = $ا ب^{ن+۱}$

$\therefore\ ب^{ن+۱} = \frac{ج}{ا}$

$ب = \left(\frac{ج}{ا}\right)^{\frac{۱}{ن+۱}}$ ............... (۱)

اواسط مطلوبہ ہوئیں $\text{ا ب، ا ب}^{۲}\text{، ا ب}^{۳}\text{، ......، ا ب}^{\text{ن}}$

جہاں ب کی قیمت (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔

**مثال۔** - ۱۶۰ اور ۵ کے درمیان ۴ اواسط ہندسیہ مندرج کرو۔

ہمیں ۶ رقوم سلسلۂ ہندسیہ کی معلوم کرنی ہیں جن میں سے پہلی رقم ۱۶۰ ہے اور چھٹی رقم ۵۔

اگر ب نسبت مشترک ہو تو $\text{۵ = چھٹی رقم = ۱۶۰ ب}^{۵}$ یا $\text{ب}^{۵} = \frac{۱}{۳۲}$

اس لیے $\text{ب} = \frac{۱}{۲}$ پس

اواسط مطلوبہ ہوئیں ۸۰، ۴۰، ۲۰، ۱۰

**۵۵** - متعدد ارقام سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو ا = پہلی رقم، ب = نسبت مشترک، ن = تعداد ارقام اور ص = حاصل جمع۔

تب $\text{ص} = \text{ا} + \text{ا ب} + \text{ا ب}^{۲} + \dots + \text{ا ب}^{\text{ن}-۲} + \text{ا ب}^{\text{ن}-۱} \quad \dots\dots (۱)$

ہر ایک رقم کو ب سے ضرب دو۔

$$\text{ب ص} = \text{ا ب} + \text{ا ب}^{۲} + \text{ا ب}^{۳} + \dots + \text{ا ب}^{\text{ن}-۱} + \text{ا ب}^{\text{ن}} \quad \dots\dots (۲)$$

(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا۔

$$\text{ب ص} - \text{ص} = \text{ا ب}^{\text{ن}} - \text{ا}$$

$$\therefore \text{ص} (\text{ب} - ۱) = \text{ا} (\text{ب}^{\text{ن}} - ۱)$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ا} (\text{ب}^{\text{ن}} - ۱)}{\text{ب} - ۱} \quad \dots\dots (۳)$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو -۱ سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا

$$\text{ص} = \frac{\text{ا} (۱ - \text{ب}^{\text{ن}})}{۱ - \text{ب}} \quad \dots\dots (۴)$$

چونکہ $\text{ا ب}^{\text{ن}-۱} = \text{خ}$ جہاں خ رقم آخر ہے

اس لیے $\text{ص} = \frac{\text{ب خ} - \text{ا}}{\text{ب} - ۱}$

**نوٹ** - بہتر ہوگا کہ طالب علم ص کی دونوں جبریہ صورتوں (۳) اور (۴) کو یاد رکھے اور (۴) کو ہمیشہ استعمال کرے سوائے اُس صورت کے جبکہ ب مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو۔

**مثال** - سلسلہ $\frac{۲}{۳}$، -۱، $\frac{۳}{۲}$، ...... کی ۷ رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

نسبت مشترک = $-\frac{۳}{۲}$ اس لیے ضابطہ (۴) کی رو سے

$$\text{ص} = \frac{\frac{۲}{۳}\left\{۱-\left(-\frac{۳}{۲}\right)^{۷}\right\}}{۱+\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۲}{۳}\left\{۱+\frac{۲۱۸۷}{۱۲۸}\right\}}{\frac{۵}{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳۱۵}{۱۲۸}\times\frac{۲}{۵} = \frac{۴۶۳}{۹۶}$$

**۵۶** - سلسلہ ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲^{۲}}$، $\frac{۱}{۲^{۳}}$ ...... پر غور کرو۔

$$\text{ن ارقام کا مجموعہ} = \frac{۱-\frac{۱}{۲^{\text{ن}}}}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲\left(۱-\frac{۱}{۲^{\text{ن}}}\right)$$

$$= ۲-\frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}$$

اِس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ سلسلۂ بالا کی خواہ کتنی بھی رقمیں لی جائیں ان کا مجموعہ ہمیشہ ۲ سے کم رہے گا نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم کسر $\frac{۱}{۲^{\text{ن}-۱}}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں۔

پس رقموں کی تعداد کافی بڑی لینے سے سلسلۂ بالا کے مجموعہ اور ۲ کا فرق اتنا کم ہوسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

اس نتیجہ کی توضیح بطریق ہندسی اسی طرح ہوسکتی ہے۔

ا ف۱ ف۲ ف۳ ف۴ ب

فرض کرو کہ اب ایک محدود خطِ مستقیم ہے۔ $\overline{\text{اب}}$ کی تنصیف $\text{ف}_1$ پر کرو۔ اور $\overline{\text{ف}_1\text{ب}}$ کی $\text{ف}_2$ پر اور $\overline{\text{ف}_2\text{ب}}$ کی $\text{ف}_3$ پر اور $\overline{\text{ف}_3\text{ب}}$ کی $\text{ف}_4$ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم اسی طرح سے اپنے اعمالِ تنصیف کو جاری رکھیں تو ب کے اتنا قریب پہنچ سکتے ہیں جتنا چاہیں یعنی ہمارے آخری حصہ $\text{ف}_\text{ن}$ ب کا طول اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ اب = ۲ انچ

تو $\text{اف}_1$ = ۱ "

$\text{ف}_1\text{ف}_2 = \frac{1}{2}$ "

$\text{ف}_2\text{ف}_3 = \frac{1}{2^2}$ "

$\text{ف}_3\text{ف}_4 = \frac{1}{2^3}$ " اور علیٰ ہذا القیاس

تو سلسلۂ غیر متناہی کا حاصل جمع $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$ تا لا تناہی

$= \text{اف}_1 + \text{ف}_1\text{ف}_2 + \text{ف}_2\text{ف}_3 + \text{ف}_3\text{ف}_4 + \ldots\ldots$ " "

جس سے ثابت ہوا کہ سلسلہ کا حاصل جمع طول اب یعنی ۲ سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا خواہ تعداد ارقام کتنی ہی بڑی لی جائے۔ اور رقموں کی تعداد کافی بڑی لینے سے سلسلۂ بالا کے مجموعہ اور ۲ کا فرق اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

آئندہ دفعہ میں اس کی صورتِ عامہ پر بحث کی جائیگی۔

**۵۷۔ لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ کا استدقاق یا عدمِ استدقاق**

فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ

$\text{ل}،\ \text{ل}\,\text{ب}،\ \text{ل}\,\text{ب}^2،\ \text{ل}\,\text{ب}^3 \ldots\ldots$ ہے

دفعہ ۵۵ کی رُو سے اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ

$$\text{ص}_\text{ن} = \frac{\text{ل}\,(1 - \text{ب}^\text{ن})}{1 - \text{ب}}$$

$$= \frac{ا}{۱ - ب} - \frac{اب^{ن}}{۱ - ب}$$

اس میں $\frac{ا}{۱-ب}$ مستقل ہے اور $\frac{اب^{ن}}{۱-ب}$ کی قیمت ن کی قیمت پر منحصر ہے۔ اگر ب بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے چھوٹا ہو تو ن کو کافی بڑا لینے سے $ب^{ن}$ کی عددی قیمت اتنی چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لیے $\frac{اب^{ن}}{۱-ب}$ کی عددی قیمت صفر کے بے انتہا قریب آجائیگی اگر ہم ن کو کافی بڑا لیں۔ پس معلوم ہوا کہ اگر ب کی عددی قیمت اکائی سے کم ہو تو ن کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلۂ ہندسیہ کی ن رقموں کے مجموعہ اور $\frac{ا}{۱-ب}$ کے فرق کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ

$ا + اب + اب^{۲} + اب^{۳} + \ldots\ldots$ کا مجموعہ $\frac{ا}{۱-ب}$ ہے،

اگر ب کی عددی قیمت اکائی سے کم ہو۔ اس صورت میں چونکہ ن کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ ایک خاص مقدار ($\frac{ا}{۱-ب}$) کی طرف مائل ہوتا ہے اس لیے ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ متدق ہے اور اس کا مجموعہ $\frac{ا}{۱-ب}$ کے برابر ہے۔

اگر ب = ۱ تو دیا ہوا سلسلہ ہو جائیگا

$ا + ا + ا + \ldots\ldots$ اور سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ

ن ا ہوگا اور ن کو کافی بڑا لینے سے ن رقموں کے مجموعہ کی عددی

قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے بھی بڑی بنائی جا سکتی ہے
اس صورت میں ن کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلہ کی ن رقموں
کا مجموعہ کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا۔
اگر ب = - ا تو سلسلہ ہوگا۔

$$ا - ا + ا - ا + ا - ا + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

اس سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ صفر یا ا ہوگا بموجب اس کے کہ ن
جفت ہے یا طاق۔ اس صورت میں بھی سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ کسی
خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا۔

اگر ب کی عددی قیمت اکائی سے بڑی ہو تو ن کو کافی بڑا لینے
سے $ب^{ن}$ کی عددی قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد
سے بھی بڑی بنائی جا سکتی ہے۔ اس صورت میں ن کو کافی بڑا لینے سے
$\frac{ا ب^{ن}}{ا - ب}$ کی عددی قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے
بڑی بنائی جا سکتی ہے اور جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے ن رقموں کے
مجموعہ کی عددی قیمت بھی بے حد بڑھ جاتی ہے اور کسی خاص مقدار کی طرف
مائل نہیں ہوتی۔

اُن تمام صورتوں میں جبکہ ن کے بے انتہا بڑھنے سے دیے ہوئے
لامتناہی سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا،
دیا ہوا لامتناہی سلسلہ غیر متدق کہلاتا ہے۔

مثال (۱) سلسلۂ غیر متناہی $\frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۳} + \frac{۸}{۲۷} - \ldots\ldots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$\text{اس جگہ } ا = \frac{۳}{۲}،\ ب = - \frac{۲}{۳} \div \frac{۳}{۲} = - \frac{۴}{۹}$$

$$\text{اس لیے مجموعۂ مطلوبہ} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۴}{۹} + ۱} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۹}{۱۳} = \frac{۲۷}{۲۶}$$

مثال (۲) تین اعداد سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۱۹ ہے

اور حاصل ضرب ۲۱۶ ہے انہیں دریافت کرو۔

اعداد کو $\frac{ا}{ب}$، ا، اب سے تعبیر کرو۔

$\frac{ا}{ب} \times ا \times اب = ۲۱۶$ یعنی $ا^۳ = ۲۱۶$ یا $ا = ۶$ پس اعداد

ہوئے $\frac{۶}{ب}$، ۶، ۶ب

$\therefore \frac{۶}{ب} + ۶ + ۶ب = ۱۹$

$\therefore ۶ - ۱۳ب + ۶ب^۲ = ۰$ یعنی $ب = \frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۲}{۳}$

اس لیے اعداد مطلوبہ ۴، ۶، ۹ ہیں

مثال (۳) ایک لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ کا حاصل جمع ۱۵ ہے اور اس کی رقموں کے مربعوں کا حاصل جمع ۴۵ ہے۔ سلسلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ رقم اول = ا اور نسبت مشترک = ب

سلسلہ کا حاصل جمع $= \frac{ا}{۱-ب} = ۱۵$ ................ (۱)

رقموں کے مربعوں کا حاصل جمع $= \frac{ا^۲}{۱-ب^۲} = ۴۵$ ........... (۲)

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے $\frac{ا}{۱+ب} = ۳$ ........... (۳)

(۱) اور (۳) سے $\frac{۱+ب}{۱-ب} = ۵$

$\therefore ب = \frac{۲}{۳}$ اور $ا = ۵$

اس لیے سلسلۂ مطلوبہ ہوا ۵، $\frac{۱۰}{۳}$، $\frac{۲۰}{۹}$، ....................

## امثلہ نمبری ۵ (ا)

۱۔ سلسلہ $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۲}{۹}$ ........... کو ۷ رقموں تک جمع کرو۔

۲- سلسلہ - ۲، $2\frac{1}{4}$، - $\frac{1}{8}$۳، .......... کو ۶ رقموں تک جمع کرو۔

۳- " $\frac{3}{4}$، $1\frac{1}{2}$، ۳، .......... " ۸ " " " "

۴- " ۲، -۴، ۸، .......... " ۱۰ " " " "

۵- " ۲ء۱۶۲، ۴ء۵۸، ۱ء۵۸، .......... " ۷ " " " "

۶- " ۱، ۵، ۲۵، .......... " ع " " " "

۷- " ۳، -۴، $\frac{16}{3}$، .......... " ۲ن " " "

۸- " ۱، $\sqrt{3}$، ۳، .......... " ۱۲ " " "

۹- " $\frac{1}{\sqrt{2}}$، -۲، $\frac{8}{\sqrt{2}}$، .......... " ۷ " " "

۱۰- " - $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$، - $\frac{3}{4}$، .......... " ۷ " " "

۱۱- ۳ اواسط ہندسیہ $2\frac{1}{4}$ اور $\frac{2}{9}$ کے درمیان مندرج کرو۔

۱۲- ۵ " " $3\frac{5}{9}$ " ۴ء$\frac{1}{2}$ " " " "

۱۳- ۶ " " ۱۴ " $\frac{7}{64}$ " " " "

ذیل کے لاتناہی سلسلوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

۱۴- $\frac{5}{8}$، -۱، $\frac{8}{5}$، ..........

۱۵- ۴۵ء، ۰ء۰۱۵، ۰ء۰۰۵، ..........

۱۶- ۱ء۶۹۵، - ۱ء۱۱، ۴ء۷، ..........

۱۷- $3^{-1}$، $3^{-2}$، $3^{-3}$، ..........

۱۸- ۳، $\sqrt{3}$، ۱، ..........

۱۹- ۷، $\sqrt{42}$، ۶، ..........

۲۰- سلسلۂ ہندسیہ میں پہلی ۶ رقموں کا مجموعہ پہلی تین رقموں کے مجموعہ کا ۹ گنا ہے۔ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۱- سلسلۂ ہندسیہ کی پانچویں رقم ۸۱ ہے اور دوسری رقم ۲۴ سلسلہ دریافت کرو۔

۲۲- کسی سلسلۂ ہندسیہ کی نسبت مشترک ۳ ہے مجموعہ ۷۲۸ اور آخری رقم ۴۸۶ رقم اول دریافت کرو۔

۲۳۔ سلسلۂ ہندسیہ کی پہلی رقم ۷ ہے آخری رقم ۴۴۸ ہے اور مجموعۂ ارقام ۸۸۹ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۴۔ سلسلۂ ہندسیہ میں تین عددوں کا مجموعہ ۳۸ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۷۲۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۲۵۔ سلسلۂ ہندسیہ میں تین اعداد کا متواتر حاصل ضرب ۲۱۶ ہے اور ان میں سے دو دو اعداد کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۱۵۶ ہے۔ انہیں دریافت کرو۔

۲۶۔ اگر $س_ع = ۱ + ب^ع + ب^{۲ع} + \dots\dots$ تا لاتناہی

اور $ص_ع = ۱ - ب^ع + ب^{۲ع} - \dots\dots$ تا لاتناہی

تو ثابت کرو کہ $س_ع + ص_ع = ۲ س_{۲ع}$

۲۷۔ اگر کسی سلسلۂ ہندسیہ کی ف ویں، ق ویں، ر ویں ارقام بالترتیب ل، م، ن ہوں تو ثابت کرو کہ $ل^{ق-ر} م^{ر-ف} ن^{ف-ق} = ۱$

۲۸۔ کسی لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ کا مجموعہ ۴ ہے اور ارقام کے مکعبوں کا مجموعہ ۱۹۲ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۵۸۔ متوالی کسور اعشاریہ لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ کی ایک عمدہ مثال ہے۔

مثال (۱) $\cdot۴\dot{۲}\dot{۳}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\cdot۴\dot{۲}\dot{۳} = \cdot۴۲۳۲۳۲۳\dots\dots$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰۰۰} + \dots\dots$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳} + \frac{۲۳}{۱۰^۵} + \dots\dots$$

یعنی $\cdot۴\dot{۲}\dot{۳} = \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳}\left\{۱ + \frac{۱}{۱۰^۲} + \frac{۱}{۱۰^۴} + \dots\dots\right\}$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰^۳} \times \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۱۰^۲}}$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} \times \frac{۱۰۰}{۹۹}$$

$$= \frac{۴}{۱۰} + \frac{۲۳}{۹۹۰} = \frac{۴۱۹}{۹۹۰}$$

**۵۹**- متوالی کسور اعشاریہ کی قیمت دریافت کرنے کا قاعدہ اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر ف سے غیر متوالی ہندسوں کو تعبیر کریں جن کی تعداد ط ہے اور اگر ق سے دَور مکرر کو تعبیر کریں جس میں ع ہندسے شامل ہیں اور

ت = متوالی کسر اعشاریہ کی قیمت تو

ت = ...... ق ق ق ف ی

اس لیے $۱۰^{ط} \times ت = ......$ ق ق ق ی ف

اور $۱۰^{ط+ع} \times ت = ......$ ق ق ق ی ق ف

تفریق سے $(۱۰^{ط+ع} - ۱۰^{ط})$ ت = ق ف - ف

اس لیے $ت = \frac{ق ف - ف}{۱۰^{ط}(۱۰^{ع} - ۱)}$ .............. (۱)

اب $(۱۰^{ع} - ۱)$ ایک ایسا عدد ہے جس میں ع دفعہ ۹ شامل ہے اس لیے معلوم ہوا کہ (۱) کا نسب نما ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسہ ۹ صریحاً ع دفعہ تکرار پاتا ہے اور اس کے اول یعنی دائیں طرف ط صفر ہیں۔ متوالی کسر اعشاریہ کو کسر عام میں لانے کا قاعدہ حسبِ ذیل ہے:-

شمار کنندہ بنانے کے لیے ایسے عدد صحیح سے جو متوالی اور غیر متوالی ہندسوں سے مل کر بنا ہو وہ عدد تفریق کرو جس میں صرف غیر متوالی ہندسے شامل ہوں اور نسب نما بنانے کے لیے ایسا عدد لو جس میں ہندسہ ۹ اتنی دفعہ تکرار پائے جتنے متوالی ہندسے دَور مکرر میں ہوں اور اس کے اول یعنی دائیں طرف اتنے صفر لکھو جتنے

غیر متوالی ہندسے ہوں۔

## ۶۰ ا۔ حسابی ہندسی سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع

سلسلہ $ا، (ا+ف)ب، (ا+۲ف)ب^{۲}، (ا+۳ف)ب^{۳}، \ldots\ldots$
کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس سلسلہ میں ہر ایک رقم سلسلۂ حسابیہ $ا، ا+ف، ا+۲ف، \ldots$ اور سلسلۂ ہندسیہ $۱، ب، ب^{۲}، ب^{۳}، \ldots$ کی مطابق رقموں کا حاصل ضرب ہے۔
فرض کرو کہ ص سے ن رقموں کا حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے، تب

$$ص = ا + (ا+ف)ب + (ا+۲ف)ب^{۲} + \ldots + \{ا + (ن-۱)ف\}ب^{ن-۱}$$

$$ب ص = \quad اب + (ا+ف)ب^{۲} + \ldots + \{ا+(ن-۲)ف\}ب^{ن-۱} + \{ا+(ن-۱)ف\}ب^{ن}$$

عمل تفریق سے

$$ص(۱-ب) = ا + (ف ب + ف ب^{۲} + \ldots + ف ب^{ن-۱}) - (ا + \overline{ن-۱}\,ف)ب^{ن}$$

$$\therefore ص = \frac{ا}{۱-ب} + \frac{ف ب(۱-ب^{ن-۱})}{(۱-ب)^{۲}} - \frac{(ا+\overline{ن-۱}\,ف)ب^{ن}}{۱-ب}$$

**نتیجۂ صحیح:۔**

چونکہ $ص = \frac{ا}{۱-ب} + \frac{ف ب}{(۱-ب)^{۲}} - \frac{ف ب^{ن}}{(۱-ب)^{۲}} - \frac{(ا+\overline{ن-۱}\,ف)ب^{ن}}{۱-ب}$

اس لیے اگر ب بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے چھوٹا ہو تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم $ب^{ن}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔ اس صورت میں اگر یہ پایا جائے کہ مجموعہ ص کی وہ تمام رقمیں جن میں $ب^{ن}$ شامل ہے، ن کو کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جا سکتی ہیں کہ

ان کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو سلسلۂ بالا کی لا انتہا رقموں کا مجموعہ

$$\frac{\text{ل}}{1-\text{ب}} + \frac{\text{ف ب}}{(1-\text{ب})^{2}}$$ کے مساوی ہوگا۔

**نوٹ۔** اس قسم کے سلسلوں کو جمع کرنے میں طالب علم کو ضابطہ مندرجۂ بالا کے استعمال کرنے کی ضرورت نہیں اسے چاہیے کہ ہر ایک صورت میں نتیجۂ مطلوب کو بلا واسطہ مفصل عمل سے حاصل کرے۔ امثلۂ ذیل سے طریق عمل کی توضیح ہوگی۔

**مثال (۱)** سلسلہ $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \cdots$ کی ن ویں رقم اور ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

سلسلۂ مجوزہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$1 + 3\times\left(\frac{1}{2}\right) + 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \cdots\cdots\cdots$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلۂ مجوزہ کی ہر ایک رقم سلسلۂ حسابیہ ۱، ۳، ۵ وغیرہ اور سلسلۂ ہندسیہ ۱، $\frac{1}{2}$، $(\frac{1}{2})^{2}$، $(\frac{1}{2})^{3}$ وغیرہ کی مطابق رقموں کا حاصل ضرب ہے۔ اس لیے سلسلۂ معلومہ کی ن ویں رقم

$$= \left\{1 + 2(\text{ن}-1)\right\} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}-1}\right\} = \frac{2\text{ن}-1}{2^{\text{ن}-1}}$$

اگر ن رقموں کے مجموعہ کو ص سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{1}{2}$ کی بجائے لا رکھنے سے

$$\text{ص} = 1 + 3\,\text{لا} + 5\,\text{لا}^{2} + 7\,\text{لا}^{3} + \cdots\cdots + (2\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$$

$$\text{ص لا} = \text{لا} + 3\,\text{لا}^{2} + 5\,\text{لا}^{3} + \cdots\cdots + (2\text{ن}-3)\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (2\text{ن}-1)\,\text{لا}$$

اس لیے تفریق سے

$$\text{ص}(1-\text{لا}) = 1 + 2\,\text{لا} + 2\,\text{لا}^{2} + \cdots\cdots + 2\,\text{لا}^{\text{ن}-1} - (2\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= 1 + \left\{2\,\text{لا} + 2\,\text{لا}^{2} + 2\,\text{لا}^{3} + \cdots\cdots (\text{ن}-1)\ \text{رقموں تک}\right\} - (2\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

چونکہ $\text{لا} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{۱}{۲} ص = ۱ + \frac{۲ \times \frac{۱}{۲}\left\{۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱}\right\}}{۱ - \frac{۱}{۲}} - (۲ن - ۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن}$$

$$= ۱ + ۲\left\{۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱}\right\} - (۲ن - ۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱}$$

$$= ۳ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱}\left\{۲ + \frac{۲ن - ۱}{۲}\right\} = ۳ - \frac{۲ن + ۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱}$$

اس لیے $ص = ۶ - (۲ن + ۳)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{ن-۱} = ۶ - \frac{۲ن + ۳}{۲^{ن-۱}}$

مثال (۲) اگر $لا < ۱$ تو لاتناہی سلسلہ
$۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + \ldots\ldots$ کو جمع کرو۔

فرض کرو کہ $ص = ۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + \ldots\ldots$ تا لاتناہی

$لا ص = لا + ۲لا^{۲} + ۳لا^{۳} + \ldots\ldots$ " "

$$\therefore ص(۱ - لا) = ۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + \ldots\ldots = \frac{۱}{۱ - لا}$$

$$\therefore ص = \frac{۱}{(۱ - لا)^{۲}}$$

مثال (۳) سلسلہ $۱ + \frac{۴}{۵} + \frac{۷}{۵^{۲}} + \frac{۱۰}{۵^{۳}} \ldots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ $ص = ۱ + \frac{۴}{۵} + \frac{۷}{۵^{۲}} + \frac{۱۰}{۵^{۳}} + \ldots\ldots + \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن-۱}}$

$$\therefore \frac{۱}{۵} ص = \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵^{۲}} + \frac{۷}{۵^{۳}} + \ldots\ldots + \frac{۳ن - ۵}{۵^{ن-۱}} + \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن}}$$

$$\therefore \frac{۴}{۵} ص = ۱ + \left(\frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۵^{۲}} + \ldots + \frac{۳}{۵^{ن-۱}}\right) - \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۵}\left(۱ + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵^{۲}} + \ldots\ldots + \frac{۱}{۵^{ن-۲}}\right) - \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۵} \times \frac{۱ - \frac{۱}{۵^{ن-۱}}}{۱ - \frac{۱}{۵}} - \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن}}$$

$$= ۱ + \frac{۳}{۴}\left(۱ - \frac{۱}{۵^{ن-۱}}\right) - \frac{۳ن - ۲}{۵^{ن}}$$

$$= \frac{۷}{۴} - \frac{۱۲ن + ۷}{۴ \times ۵^{ن}}$$

$$\therefore ص = \frac{۳۵}{۱۶} - \frac{۱۲ن + ۷}{۱۶ \times ۵^{ن-۱}}$$

## ۶۰ ب۔ سلسلۂ ہندسیہ کی متفرق مثالیں۔

مثال (۱) اگر $ص_{ن}$ سے کسی سلسلۂ ہندسیہ کی ن رقموں کا مجموعہ تعبیر ہو تو $ص_{۱} + ص_{۲} + ص_{۳} + \ldots\ldots + ص_{ن}$ کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا = رقم اول اور ب = نسبت مشترک

$$ص_{ن} = \frac{ا(ب^{ن} - ۱)}{ب - ۱}$$

اس لیے $ص_{۱} = \frac{ا(ب - ۱)}{ب - ۱}$، $ص_{۲} = \frac{ا(ب^{۲} - ۱)}{ب - ۱}$، $ص_{۳} = \frac{ا(ب^{۳} - ۱)}{ب - ۱}$ اور علیٰ ہذا القیاس

اس لیے $ص_{۱} + ص_{۲} + ص_{۳} + \ldots\ldots + ص_{ن}$

$$= \frac{ا}{ب - ۱}\left\{(ب - ۱) + (ب^{۲} - ۱) + (ب^{۳} - ۱) + \ldots\ldots + (ب^{ن} - ۱)\right\}$$

$$= \frac{ا}{ب - ۱}\left\{(ب + ب^{۲} + ب^{۳} + \ldots\ldots + ب^{ن}) - ن\right\}$$

$$= \frac{ا}{ب - ۱}\left\{\frac{ب(ب^{ن} - ۱)}{ب - ۱} - ن\right\}$$

$$= \frac{ب\,ا(ب^{ن} - ۱)}{(ب - ۱)^{۲}} - \frac{ن\,ا}{ب - ۱}$$

مثال (۲) سلسلہ ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + ..... کی ن رقموں کا حاصل جمع

دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ص مجموعہ مطلوبہ ہے۔

اس لیے ص = ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + ....... ن رقموں تک

$= ۵ \{۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + \dots$ ن رقموں تک$\}$

$= \frac{۵}{۹} \{۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \dots$ ن رقموں تک$\}$

$= \frac{۵}{۹} \{(۱۰-۱) + (۱۰۰-۱) + (۱۰۰۰-۱) + \dots$ ن رقموں تک$\}$

$= \frac{۵}{۹} \{(۱۰ + ۱۰^{۲} + ۱۰^{۳} + \dots$ ن رقموں تک$) -$ ن$\}$

$= \frac{۵}{۹} \left\{ \frac{۱۰(۱۰^{ن} - ۱)}{۱۰ - ۱} - ن \right\} = \frac{۵۰}{۸۱}(۱۰^{ن} - ۱) - \frac{۵ن}{۹}$

مثال (۳) سلسلہ ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + ..... کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ $ق_{ن}$ سے سلسلۂ مجوزہ کی ن ویں رقم تعبیر ہوتی ہے۔

اور ص = ن رقموں کا مجموعہ

$\therefore$ ص $= ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + \dots + ق_{ن}$

نیز ص $= ۰ + ۱ + ۵ + ۱۳ + \dots + ق_{ن-۱} + ق_{ن}$

تفریق سے $۰ = (۱ + ۴ + ۸ + ۱۶ + \dots$ ن رقموں تک$) - ق_{ن}$

اس لیے $ق_{ن} = ۱ + \{۴ + ۸ + ۱۶ + \dots$ $\overline{ن - ۱}$ رقموں تک$\}$

$= ۱ + \frac{۴(۲^{ن-۱} - ۱)}{۲ - ۱} = ۱ + ۲^{۲} \times (۲^{ن-۱} - ۱) = ۲^{ن+۱} - ۳$

اس لیے پہلی رقم $= ۲^{۲} - ۳$، دوسری رقم $= ۲^{۳} - ۳$، تیسری رقم $= ۲^{۴} - ۳$،

اور علیٰ ہذا القیاس

اس لیے ص $= (۲^{۲} - ۳) + (۲^{۳} - ۳) + (۲^{۴} - ۳) + \dots + (۲^{ن-۱} - ۳)$

$= (۲^{۲} + ۲^{۳} + ۲^{۴} + \dots$ ن رقموں تک$) - ۳ن$

$= \frac{۲^{۲}(۲^{ن} - ۱)}{۲ - ۱} - ۳ن = ۴(۲^{ن} - ۱) - ۳ن$

مثال (۴) اگر ن اواسط ہندسیہ دو مقادیر ا اور ج کے درمیان

مندرج کی جائیں تو ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ضرب = $(ا ج)^{\frac{ن}{۲}}$

فرض کرو کہ $ا ب$، $ا ب^{۲}$، ...... $ا ب^{ن}$ اواسط ہندسیہ ہیں

تب $ج = ا ب^{ن+۱}$

اس لیے حاصل ضرب اواسط $= (ا ب)(ا ب^{۲})(ا ب^{۳}) ...... (ا ب^{ن})$

$$= ا^{ن} \times ب^{۱+۲+۳+.....+ن} = ا^{ن} \times ب^{\frac{ن(ن+۱)}{۲}}$$

$$= ا^{\frac{ن}{۲}} (ا ب^{ن+۱})^{\frac{ن}{۲}} = ا^{\frac{ن}{۲}} \times ج^{\frac{ن}{۲}} = (ا ج)^{\frac{ن}{۲}}$$

## امثلہ نمبری ۵ ب

۱۔ سلسلہ $۱ + ۲ ا + ۳ ا^{۲} + ۴ ا^{۳} + ......$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

۲۔ " $۱ + \frac{۳}{۴} + \frac{۷}{۱۶} + \frac{۱۵}{۶۴} + \frac{۳۱}{۲۵۶} + ......$ کو لاتناہی تک "

۳۔ اگر $لا < ۱$ تو سلسلہ $۱ + ۳ لا + ۵ لا^{۲} + ۷ لا^{۳} + ۹ لا^{۴} + ....$ کو لاتناہی تک "

۴۔ سلسلہ $۱ + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۲^{۲}} + \frac{۴}{۲^{۳}} + ......$ کو ن رقموں تک "

۵۔ " $۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۸} + ......$ کو لاتناہی تک "

۶۔ اگر $لا < ۱$ تو سلسلہ $۱ + ۳ لا + ۶ لا^{۲} + ۱۰ لا^{۳} + ...$ کو لاتناہی تک "

۷۔ کسی سلسلۂ ہندسیہ کی پہلی رقم ا ہے اور تیسری رقم ج۔ ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی (ن+۱) ویں رقم برابر ہوگی اس سلسلۂ ہندسیہ کی (۲ ن + ۱) ویں رقم کے جس کی پہلی رقم ا ہو اور پانچویں رقم ج۔

۸۔ ایک سلسلۂ ہندسیہ کی پہلی رقم ا ہے اور نسبت مشترک ب اگر اس کی ۲ن رقموں کا مجموعہ ایک ایسے سلسلہ کی ن ارقام کے مجموعہ کے برابر ہو جس کی پہلی رقم ج ہو اور نسبت مشترک $ب^{۲}$ تو ثابت کرو کہ ج سلسلۂ اول کی پہلی دو رقموں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

٩۔ لامتناہی سلسلہ ١ + (١ + د) ب + (١ + د + د^٢) ب^٢ + (١ + د + د^٢ + د^٣) ب^٣ + ............ کا مجموعہ دریافت کرو۔ اس میں د اور ب کسور واجب ہیں۔

١٠۔ تین اعداد سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں، ان کا مجموعہ ٧٠ ہے اگر طرفین میں سے ہر ایک کو ٤ سے اور اوسط کو ٥ سے ضرب دیا جائے تو یہ حاصل ضرب سلسلۂ حسابیہ میں ہوتے ہیں، اعداد دریافت کرو۔

١١۔ کسی لامتناہی سلسلۂ ہندسیہ کی پہلی دو رقموں کا مجموعہ ٥ ہے اور ہر ایک رقم اپنے مابعد کی تمام رقموں کے مجموعہ کی ٣ گنی ہے سلسلہ دریافت کرو۔

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

١٢۔ لا + ا، لا^٢ + ٢ا، لا^٣ + ٣ا، ............ کو ن رقموں تک

١٣۔ لا (لا + ما) + لا^٢ (لا^٢ + ما^٢) + لا^٣ (لا^٣ + ما^٣) + ..... کو ن رقموں تک

١٤۔ ا + ١/٣ ، ٣ا − ١/٦ ، ٥ا + ١/١٢ ، ............ کو ٢ع رقموں تک

١٥۔ ٢/٣ + ٣/٣^٢ + ٢/٣^٣ + ٣/٣^٤ + ٣/٣^٥ + ٣/٣^٦ + .... کو لامتناہی تک

١٦۔ ٤/٧ − ٥/٧^٢ + ٤/٧^٣ − ٥/٧^٤ + ٤/٧^٥ + ٥/٧^٦ ........ کو لامتناہی تک

١٧۔ اگر ا، ب، ج، د سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

(ب − ج)^٢ + (ج − ا)^٢ + (د − ب)^٢ = (ا − د)^٢

١٨۔ سلسلہ ٤ + ٤٤ + ٤٤٤ + ........ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

١٩۔ " ٩ء + ٩٩ء + ٩٩٩ء + ...... کو ن " " "

٢٠۔ " ١ + ٧ + ٢٥ + ٧٩ + ٢٤١ + ..... کو ن " " "

٢١۔ " ٠ + ٦ + ٢٤ + ٧٨ + ٢٤٠ + ..... کو ن " " "

٢٢۔ اگر ا اور د کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی کا دوچند ہو تو ثابت کرو کہ ا : د = ٢ + √٣ : ٢ − √٣

۲۳- کسی سلسلہ کی $ر$ ویں رقم $(۲ر+۱)۲^{ر}$ ہے، اُس سلسلہ کی $ن$ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۴- کسی سلسلہ کی ہر ایک جفت رقم اپنی رقم ماقبل کی $ا$ گنی ہے اور ہر ایک طاق رقم اپنی رقم ماقبل کی $ج$ گنی ہے رقم اول ایک ہے $۲ن$ رقموں تک اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

۲۵- اگر کسی سلسلۂ ہندسیہ کی پہلی رقم = $ا$، نسبت مشترک = $ب$ اور $ن$ رقموں کا حاصل جمع = $ص_{ن}$ تو $ص_{۱}$، $ص_{۳}$، $ص_{۵}$، .... $ص_{۲ن-۱}$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۶- اگر $ص_{۱}$، $ص_{۲}$، $ص_{۳}$ .... $ص_{پ}$ سے بالترتیب ان لامتناہی ہندسی سلسلوں کے مجموعے تعبیر کیے جائیں جن کی پہلی رقمیں بالترتیب ۱، ۲، ۳ .... $پ$ ہوں اور جن کی مشترک نسبتیں بالترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، .... $\frac{۱}{پ+۱}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ص_{۱}+ص_{۲}+ص_{۳}+.....+ص_{پ}=\frac{پ}{۲}(پ+۳)$$

۲۷- اگر $ب$ مثبت ہو اور ایک سے کم ہو اور $م$ مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۲م+۱)\,ب^{م}\,(۱-ب) < ۱-ب^{۲م+۱}$

اس سے ثابت کرو کہ جب $ن$ لا انتہا بڑا ہو تو $ن\,ب^{ن}$ لا انتہا چھوٹا ہوگا۔

---

# باب ششم

## سلسلۂ موسیقیہ

**۶۱۔ تعریف۔** تین مقادیر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں کہلاتی ہیں اگر $\frac{ا}{ج} = \frac{ا - ب}{ب - ج}$ یعنی اگر پہلی مقدار کو تیسری مقدار سے وہی نسبت ہو جو پہلی اور دوسری کے حاصل تفریق کو دوسری اور تیسری کے حاصل تفریق سے ہے۔

ایک سلسلۂ مقادیر سلسلۂ موسیقیہ کہلاتا ہے جب اس کی ہر تین متصل رقموں میں مذکورۂ بالا ربط موجود ہو۔

۶۲۔ اگر تین مقداریں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ان کے متکافی یا مقلوب سلسلۂ حسابیہ میں ہونگے۔

بموجب تعریف اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو

$$\frac{ا}{ج} = \frac{ا - ب}{ب - ج}$$

$$\therefore ا(ب - ج) = ج(ا - ب)$$

ہر ایک رقم کو ا ب ج پر تقسیم کرنے سے

$\frac{1}{ج} - \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}$ جس سے مسئلہ ثابت ہوا۔

ظاہر ہے کہ ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$، ..................

اور $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{3}$، $-\frac{1}{8}$، $-\frac{1}{13}$، $-\frac{1}{18}$، ...............................
موسیقی سلسلے میں کیونکہ ان کی رقموں کے متکافی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ......
اور ۲، -۳، -۸، -۱۲، -۱۸، ........ حسابی سلسلے ہیں۔

چونکہ سلسلۂ موسیقیہ سلسلۂ حسابیہ کی رقموں کو الٹنے سے حاصل ہوتا ہے اس لیے سلسلۂ موسیقیہ کی صورت عامہ یہ ہے۔

$$\frac{1}{\text{ا}},\ \frac{1}{\text{ا}+\text{ف}},\ \frac{1}{\text{ا}+۲\text{ف}},\ \frac{1}{\text{ا}+۳\text{ف}}\ \cdots\cdots\ \frac{1}{\text{ا}+(\text{ن}-۱)\text{ف}}$$

**۶۳** - خواص موسیقیہ زیادہ تر علم ہندسہ اور علم صوت میں کار آمد ہیں جبر و مقابلہ میں صرف مسئلہ دفعہ سابق اہم ہے۔ اگر مقادیر سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو اُن کا حاصل جمع دریافت کرنے کے لیے کوئی عام ضابطہ نہیں ہے سلسلۂ موسیقیہ کے سوالات رقموں کو الٹ کر حاصل شدہ سلسلۂ حسابیہ کی مدد سے حل ہوتے ہیں۔

**۶۴** - دو مقداروں کا موسیقی اوسط دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ب مقادیر معلومہ ہیں اور م ان کا اوسط موسیقی ہے

تب $\frac{1}{\text{ا}}$، $\frac{1}{\text{م}}$، $\frac{1}{\text{ب}}$ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں

$$\text{اس لیے}\quad \frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ا}}=\frac{1}{\text{ب}}-\frac{1}{\text{م}}$$

$$\frac{2}{\text{م}}=\frac{1}{\text{ا}}+\frac{1}{\text{ب}}$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{م}=\frac{2\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}$$

**مثال (۱)** ۵ اور $\frac{5}{9}$ کے درمیان ۲۰ اواسط موسیقی مندرج کرو۔

فرض کرو کہ اواسط مطلوبہ ی۱، ی۲، ........ ی۲۰ ہیں۔

تب $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{\text{ی}_1}$، $\frac{1}{\text{ی}_2}$، $\frac{1}{\text{ی}_3}$، …… $\frac{1}{\text{ی}_{20}}$، $\frac{6}{5}$ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

اگر ہم سلسلۂ مندرجۂ بالا کے فرق مشترک کو بہ سے تعبیر کریں تو

$\frac{6}{5}$ = ۲۲ ویں رقم = $\frac{1}{5} + 21\,\text{بہ}$ جس سے بہ = $\frac{1}{21}\left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{21}$

اس لیے $\frac{1}{\text{ی}_1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}$

$$\frac{1}{\text{ی}_2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{21} = \frac{31}{105}$$

$$\frac{1}{\text{ی}_3} = \frac{1}{5} + \frac{3}{21} = \frac{36}{105}$$

……………………

$$\frac{1}{\text{ی}_{20}} = \frac{6}{5} - \frac{1}{21} = \frac{121}{105}$$

اس لیے اواسط مطلوبہ $\frac{105}{26}$، $\frac{105}{31}$، $\frac{105}{36}$، …… $\frac{105}{121}$ ہیں۔

مثال (۲) ۱ اور $\frac{1}{20}$ کے درمیان ۱۸ اواسط موسیقیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ $\text{ی}_1$، $\text{ی}_2$، $\text{ی}_3$، …… $\text{ی}_{18}$ اواسط مطلوبہ ہیں۔

تب ۱، $\frac{1}{\text{ی}_1}$، $\frac{1}{\text{ی}_2}$، $\frac{1}{\text{ی}_3}$، …… $\frac{1}{\text{ی}_{18}}$، ۲۰ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

اگر بہ = فرق مشترک تو ۲۰ = ۲۰ ویں رقم = $1 + 19\,\text{بہ}$ جس سے بہ = ۱

اس لیے $\frac{1}{\text{ی}_1} = 1 + \text{بہ} = 2$، $\frac{1}{\text{ی}_2} = 1 + 2\,\text{بہ} = 3$

$$\frac{1}{\text{ی}_3} = 1 + 3\,\text{بہ} = 4،\quad \frac{1}{\text{ی}_4} = 1 + 4\,\text{بہ} = 5$$

$$\frac{1}{\text{ی}_{18}} = 20 - \text{بہ} = 19$$

پس اواسط مطلوبہ $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، ........ $\frac{1}{18}$، $\frac{1}{19}$ ہیں۔

**مثال (۳)** ۷ اور $\frac{1}{6}$ کے درمیان ۴۰ اواسط موسیقیہ مندرج کرو۔

چونکہ ۶ ایک ایسے سلسلۂ حسابیہ کی ۴۲ ویں رقم ہے جس کی رقم اول $\frac{1}{7}$ ہے
اس لیے ۶ = $\frac{1}{7}$ + ۴۱ ف جہاں ف فرق مشترک ہے یعنی ف = $\frac{1}{7}$
پس اواسط حسابیہ $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، ........ $\frac{41}{7}$ ہوئیں۔

اس لیے اواسط موسیقیہ $3\frac{1}{2}$، $2\frac{1}{3}$، ........ $\frac{7}{41}$ ہیں۔

**مثال (۴)** سلسلہ $\frac{2}{9}$، $\frac{4}{17}$، $\frac{1}{4}$ وغیرہ کی ساتویں رقم دریافت کرو۔

رقموں کے متکافی $\frac{18}{4}$، $\frac{17}{4}$، $\frac{16}{4}$، وغیرہ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں جس سے ظاہر ہے کہ سلسلۂ مجوزہ موسیقی سلسلہ ہے۔ اس لیے اس کی ساتویں رقم سلسلۂ حسابیہ $\frac{18}{4}$، $\frac{17}{4}$، $\frac{16}{4}$ وغیرہ کی ساتویں رقم کے مقلوب کے برابر ہے۔
اب چونکہ اس سلسلہ کا فرق مشترک = $-\frac{1}{4}$ اور رقم اول = $\frac{18}{4}$

اس لیے ساتویں رقم = $\frac{18}{4} - \frac{1}{4} \times 6 = \frac{12}{4} = 3$ اس لیے سلسلۂ مجوزہ کی ساتویں رقم = $\frac{1}{3}$

**مثال (۵)** ایک سلسلۂ موسیقیہ کی پانچویں رقم $\frac{2}{5}$ ہے اور نویں رقم $\frac{1}{2}$ اُس کی پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ متناظر سلسلۂ حسابیہ کی پہلی رقم ا ہے اور فرق مشترک ف، تب $\frac{5}{2}$ = سلسلۂ حسابیہ کی پانچویں رقم = ا + ۴ ف ...... (۱)
اور ۲ = سلسلۂ حسابیہ کی نویں رقم = ا + ۸ ف .......... (۲)
(۲) سے (۱) کو تفریق کرنے سے ۴ ف = $-\frac{1}{2}$ اس لیے ف = $-\frac{1}{8}$
اس لیے (۲) سے ا = ۲ - ۸ ف = ۳

پس متناظر سلسلۂ حسابیہ کی پہلی تین رقمیں ۳، ۳ - $\frac{1}{8}$، ۳ - $\frac{2}{8}$

یعنی ۳، $\frac{۲۳}{۸}$، $\frac{۱۱}{۴}$ ہیں۔

اس لیے سلسلۂ موسیقیہ کی پہلی تین رقمیں $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۸}{۲۳}$، $\frac{۴}{۱۱}$ ہیں۔

**۶۵۔** دو مثبت حقیقی مقادیر ا اور ب کے درمیان حسابی، ہندسی اور موسیقی اوساط بالترتیب ح، ہ، م ہیں اُن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ $ح = \frac{ا+ب}{۲}$ ........................ (۱)

$ہ = \sqrt{اب}$ ........................ (۲)

اور $م = \frac{۲اب}{ا+ب}$ ........................ (۳)

اس لیے $ح\,م = \frac{ا+ب}{۲} \times \frac{۲اب}{ا+ب} = اب = ہ^{۲}$

جس سے ظاہر ہے کہ ہ اوسط ہندسی ہے ح اور م کے درمیان۔

یعنی ح، ہ، م سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں

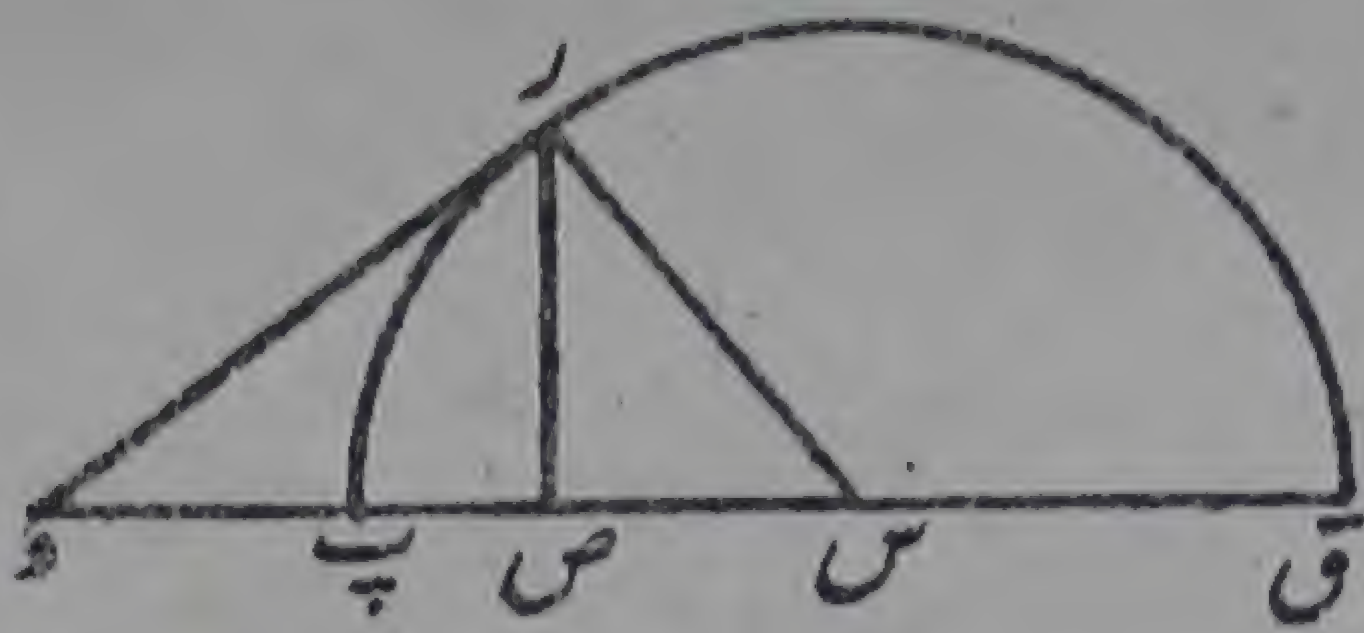
نیز $ح - ہ = \frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب} = \frac{ا+ب-۲\sqrt{اب}}{۲}$

$= \left(\frac{\sqrt{ا} - \sqrt{ب}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$ جو مثبت ہے اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو حقیقی مثبت مقداروں کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

نیز مساوات $ہ^{۲} = ح\,م$ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہ کی قیمت ح اور م کے درمیان واقع ہے اور اوپر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ $ح > ہ$

اس لیے $ہ > م$، یعنی $ح > ہ > م$، پس معلوم ہوا کہ دو حقیقی مثبت مقداروں کے اوساط حسابیہ ہندسیہ اور موسیقیہ گھٹتے ہوئے سلسلہ میں ہوتے ہیں۔

اب ہم اوساط ح، ہ، م کی ہندسی تعبیر بیان کرینگے۔

ایک خطِ مستقیم وپ ق پر وپ اور د ق اُن دو مقداروں کے برابر بناؤ جن کے اواسط مطلوب ہیں۔ پ ق کی تنصیف س پر کرو پ ق پر ایک نصف دائرہ پ ر ق بناؤ مماس و ر کھینچو اور پ ق پر عمود ر ص نکالو۔



اب وپ + وق = (وس - س پ) + (وس + س ق)
= ۲ وس، کیونکہ س پ = س ق

∴ وپ اور وق کے درمیان اوسط حسابی وس ہے

اب وپ × وق = ور۲

اس لیے معلوم ہوا کہ وپ اور وق کے درمیان اوسط ہندسی ور ہے

نیز $\frac{\text{۲ وپ × وق}}{\text{وپ + وق}} = \frac{\text{۲ ور۲}}{\text{۲ وس}}$

$= \frac{\text{وص × وس}}{\text{وس}} = \text{وص}$

اس لیے معلوم ہوا کہ وپ اور وق کے درمیان اوسط موسیقی وص ہے۔ شکل سے یہ ظاہر ہے کہ وس > ور > وص یعنی

ح > ھ > م

۹۶۔ سلسلوں کے متفرق سوالات کے حل کرنے میں عام عقل اور فراست کے لیے کافی جگہ ہے ذیل کے چند اشارات طالب علم کو

مفید ثابت ہونگے۔

(۱) اگر سلسلۂ حسابیہ کی تمام رقموں میں ایک ہی مقدار جمع یا منفی کر دیجائے تو ایک نیا سلسلۂ حسابیہ پیدا ہوگا جس کا فرق مشترک وہی ہوگا جو اصلی سلسلے کا تھا۔

(۲) اگر سلسلۂ حسابیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلۂ حسابیہ پیدا ہوگا مگر اس کا فرق مشترک وہ نہ ہوگا جو اصلی سلسلۂ حسابیہ کا تھا۔

(۳) اگر سلسلۂ ہندسیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلۂ ہندسیہ پیدا ہوگا۔ اور اس کی نسبت مشترک وہی ہوگی جو پہلے سلسلے کی تھی۔

(۴) اگر ا، ب، ج، د، وغیرہ، سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو تناسب مسلسل میں ہونگے کیونکہ ہندسی سلسلہ کی تعریف سے

ا/ب = ب/ج = ج/د = ...... = ا/ر جہاں ر نسبتِ مشترک ہے برعکس اس کے جو مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں ان کو ہم سلسلۂ ا، ار، ار$^2$، ...... سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال (۱) اگر ا$^2$، ب$^2$، ج$^2$، سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مقادیر ب + ج، ج + ا، ا + ب سلسلۂ موسیقیہ میں ہونگی۔

ہر ایک رقم میں اب + ب ج + ج ا جمع کرنے سے معلوم ہوگا کہ

ا$^2$ + اب + ب ج + ج ا، ب$^2$ + اب + ب ج + ج ا، ج$^2$ + اب + ب ج + ج ا سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی (ا + ب)(ا + ج)، (ب + ج)(ب + ا)، (ج + ا)(ج + ب)

سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔ ہر ایک رقم کو (ا + ب)(ب + ج)(ج + ا) پر

تقسیم کرو۔

پس $\frac{ا}{ب + ج}$، $\frac{ا}{ج + ا}$، $\frac{ا}{ا + ب}$ سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی ب + ج، ج + ا، ا + ب سلسلۂ موسیقیہ میں ہیں۔

مثال (۲) اگر کسی سلسلۂ حسابیہ میں خ = آخری رقم، ف = فرق مشترک، ص = حاصل جمع ن ارقام اور ۸ ف ص = (ف + ۲خ)$^{۲}$ تو ثابت کرو کہ ف = ۲ ا جہاں ا رقم اول ہے۔

چونکہ مساوات مذکورۂ بالا ن کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے فرض کرو کہ ن = ۱ تب ا = خ = ص

ان قیمتوں کو مساوات میں رکھنے سے

۸ ا ف = (ف + ۲ ا)$^{۲}$ یعنی (ف - ۲ ا)$^{۲}$ = ۰ یعنی ف = ۲ ا

مثال (۳) اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں، س ویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ پ - ق، ق - ر، ر - س سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔

معمولی ترقیم کے مطابق شرائط سوال سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{ا + (پ - ۱) ف}{ا + (ق - ۱) ف} = \frac{ا + (ق - ۱) ف}{ا + (ر - ۱) ف}$$

$$= \frac{ا + (ر - ۱) ف}{ا + (س - ۱) ف}$$

اس لیے ہر ایک نسبت $= \frac{\{ا + (پ - ۱) ف\} - \{ا + (ق - ۱) ف\}}{\{ا + (ق - ۱) ف\} - \{ا + (ر - ۱) ف\}}$

$$= \frac{\{ا + (ق - ۱) ف\} - \{ا + (ر - ۱) ف\}}{\{ا + (ر - ۱) ف\} - \{ا + (س - ۱) ف\}} = \frac{پ - ق}{ق - ر} = \frac{ق - ر}{ر - س}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ پ - ق، ق - ر، ر - س سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔

**مثال (۴)** اگر ا، ب، ج، د، ر سلسلۂ موسیقیہ کی پانچ متصل رقمیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ا + ر)(ب + ج)(ج + د) = ۲ج(ا + د)(ب + ر) \quad \ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ $ا = \frac{۱}{ع - ۲ط}$، $ب = \frac{۱}{ع - ط}$، $ج = \frac{۱}{ع}$، $د = \frac{۱}{ع + ط}$،

$$ر = \frac{۱}{ع + ۲ط}$$

ا، ب، ج، د، ر کی یہ قیمتیں درج کرنے سے رشتہ (۱) کی دائیں جانب

$$= \left(\frac{۱}{ع - ۲ط} + \frac{۱}{ع + ۲ط}\right)\left(\frac{۱}{ع - ط} + \frac{۱}{ع}\right)\left(\frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ع + ط}\right)$$

$$= \frac{۲(۴ع^۲ - ط^۲)}{ع(ع^۲ - ط^۲)(ع^۲ - ۴ط^۲)}$$

اسی طرح رشتہ (۱) کی بائیں جانب

$$= \frac{۲}{ع}\left(\frac{۱}{ع - ۲ط} + \frac{۱}{ع + ط}\right)\left(\frac{۱}{ع - ط} + \frac{۱}{ع + ۲ط}\right)$$

$$= \frac{۲(۴ع^۲ - ط^۲)}{ع(ع^۲ - ط^۲)(ع^۲ - ۴ط^۲)}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ دیا ہوا رشتہ (۱) درست ہے۔

## امثلہ نمبری (۶) ا

۱ - ذیل کے ہر ایک سلسلہ کی چوتھی رقم دریافت کرو۔

(۱) ۲، $۲\frac{۱}{۲}$، $۳\frac{۱}{۳}$،

(۲) ۲، $۲\frac{۱}{۲}$، ۳،

(۳) ۲، $\frac{1}{2}$۲، $\frac{1}{4}$۲، ۳، ..................

۲- دو اوساط موسیقیہ ۵ اور ۱۱ کے درمیان مندرج کرو۔

۳- چار " " $\frac{2}{3}$ اور $\frac{2}{13}$ " " "

۴- اگر دو اعداد کے درمیان ۱۲ اور $\frac{3}{5}$ ۹ بالترتیب ہندسی اور موسیقی اوسط ہوں تو اُن اعداد کو دریافت کرو۔

۵- اگر دو مقداروں کے اوسط موسیقی اور اوسط ہندسی کی نسبت ۱۲ : ۱۳ ہو تو ثابت کرو کہ ان مقداروں کی باہمی نسبت ۴ : ۹ ہے۔

۶- اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا : ا - ب = ا + ج : ا - ج

۷- اگر ایک سلسلۂ موسیقی کی م ویں رقم ن ہو اور ن ویں رقم م ہو تو ثابت کرو کہ اس کی (م + ن) ویں رقم $\frac{\text{م ن}}{\text{م + ن}}$ ہو گی۔

۸- اگر ا اور ج کا اوسط موسیقی ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ب - ا}} + \frac{1}{\text{ب - ج}} = \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ج}}$$

۹- سلسلۂ موسیقیہ میں تین اعداد کا مجموعہ ۲۷ ہے اور اُن کے مربعوں کا مجموعہ ۲۶۹ انھیں دریافت کرو۔

۱۰- دو اعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بقدر $\frac{3}{2}$ کے زیادہ ہے اور اوسط ہندسی اُن کے اوسط موسیقی سے بقدر $\frac{6}{5}$ کے زیادہ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۱- دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اوساط کے مربعوں کا فرق ۴۰۰ ہے اور ان کے ہندسی اور موسیقی اوساط کے مربعوں کا فرق ۲۴۴ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۲- دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اوساط کا فرق ۱۳ ہے اُن کے ہندسی اور موسیقی اوساط کا فرق ۱۲۰ ہے اعداد معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر کسی سلسلۂ موسیقیہ کی پ ویں، ق ویں، ر ویں رقمیں بالترتیب ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

(پ۔ق) ا ب + (ق۔ر) ب ج + (ر۔پ) ج ا = ۰

۱۴۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی (م + ۱) ویں، (ن + ۱) ویں اور (ر + ۱) ویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں اور م، ن، ر سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلۂ حسابیہ کے فرق مشترک اور رقم اول کی نسبت۔ ۲/ن ہے۔

۱۵۔ اگر تین اعداد ل، م، ن سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں اور ایک سلسلۂ حسابیہ کی ل ویں، ن ویں، ر ویں رقمیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس سلسلۂ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک کی نسبت (م + ۱) : ا ہو گی۔

۱۶۔ اگر کسی دو مقداروں کے درمیان دو اواسط حسابیہ ح، ح، دو اواسط ہندسیہ ھ، ھ، اور دو اواسط موسیقیہ م، م مندرج کی جائیں تو ثابت کرو کہ ھ ھ : م م = ح + ح : م + م

۱۷۔ اگر دو اعداد کے ن اواسط حسابیہ میں سے پہلا اوسط پ ہو اور ان ہی اعداد کے ن اواسط موسیقیہ میں سے پہلا موسیقی اوسط ق ہو تو ثابت کرو کہ ق کی قیمت پ اور $\left(\frac{ن+۱}{ن-۱}\right)^۲$ پ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

## اعداد طبعیہ

۶۷۔ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ........ کو طبعی اعداد کہتے ہیں یہ ایک سلسلۂ حسابیہ ہے جس کی ن ویں رقم ن ہے اور جس کی ن رقموں کا حاصل جمع $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہے ہم آئندہ پہلے ن طبعی اعداد کی پہلی، دوسری، تیسری، چوتھی، قوتوں کے مجموعوں کو بالترتیب

$ص_ن^۱$، $ص_ن^۲$، $ص_ن^۳$، $ص_ن^۴$ ........ سے تعبیر کرینگے یعنی

$$ص_ن^۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$$

$$ص_ن^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ن^۲$$

$$ص_ن^۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + ن^۳$$ اور علیٰ ہذا القیاس

اپنی آیندہ سہولت کے لیے ہم اس جگہ ایک اور طریق کتابت اختیار کرتے ہیں جو اعلیٰ ریاضی میں طالب علم کے اکثر کام آئے گا۔ ہم ذیل کے سلسلوں کو اس طرح تعبیر کریں گے۔

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ن = \sum_{۱}^{ن} ر$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + \dots + ن^۲ = \sum_{۱}^{ن} ر^۲$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + \dots + ن^۳ = \sum_{۱}^{ن} ر^۳$$

اور علیٰ ہذا القیاس

نوٹ۔ علامت $\sum_{۱}^{ن} ر$ اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتی ہے جس کی ر ویں رقم ر ہے۔ اسی طرح زیادہ عام طور پر علامت $\sum_{۱}^{ن} ف(ر)$ اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتی ہے جس کی ر ویں رقم ف (ر) ہے۔

**۹۸۔** پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$ص_ن^۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$$

$(لا + ۱)^۲ - لا^۲ = ۲لا + ۱$ ایک مساوات متماثلہ ہے۔

اب اگر لا کی جگہ قیمتیں ن، ن-۱، ن-۲، ن-۳، ......... ۲، ۱ یکے بعد دیگرے مساوات مندرجۂ بالا میں رکھی جائیں تو ہمیں معادلات ذیل حاصل ہونگی۔

$$(\text{ن}+۱)^۲-\text{ن}^۲=۲\text{ن}+۱$$

$$\text{ن}^۲-(\text{ن}-۱)^۲=۲(\text{ن}-۱)+۱$$

..........................

$$۳^۲-۲^۲=۲\times۲+۱$$

$$۲^۲-۱^۲=۲\times۱+۱$$

اگر سب مساواتوں کو جمع کیا جائے تو دائیں طرف کی رقوم سوائے دو کے ایک دوسرے کو نابود کر دینگی۔

$$\therefore (\text{ن}+۱)^۲-۱=۲\,\text{ص}^{۱}_{\text{ن}}+\text{ن}$$

$$\therefore ۲\,\text{ص}^{۱}_{\text{ن}}=(\text{ن}+۱)^۲-(\text{ن}+۱)=\text{ن}(\text{ن}+۱)$$

یا

$$\text{ص}^{۱}_{\text{ن}}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$$

**نوٹ۔** ۱، ۲، ۳، ...... ایک سلسلۂ حسابیہ ہے جس کا مجموعہ ن رقموں

$$=\frac{\text{ن}}{۲}\left\{۲+(\text{ن}-۱)\times۱\right\}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$$

**۶۹۔** پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

مساوات متماثلہ $(\text{لا}+۱)^۳-\text{لا}^۳=۳\text{لا}^۲+۳\text{لا}+۱$ میں یکے بعد دیگرے لا = ن، لا = ن-۱، ...... لا = ۲، لا = ۱ رکھنے سے

$$(\text{ن}+۱)^۳-\text{ن}^۳=۳\text{ن}^۲+۳\text{ن}+۱$$

$$\text{ن}^۳-(\text{ن}-۱)^۳=۳(\text{ن}-۱)^۲+۳(\text{ن}-۱)+۱$$

..........................

$$۳^۳-۲^۳=۳\times۲^۲+۳\times۲+۱$$

$$۲^۳-۱^۳=۳\times۱^۲+۳\times۱+۱$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے

$$(\text{ن}+۱)^۳-۱=۳\,\text{ص}^{۲}_{\text{ن}}+۳\,\text{ص}^{۱}_{\text{ن}}+\text{ن}$$

چونکہ $ص_{ن۱}$ کی قیمت ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں، اس لیے

$$۳ ص_{ن۲} = (ن+۱)^{۳} - \frac{۳}{۲} ن(ن+۱) - (ن+۱)$$

$$= \frac{(ن+۱)}{۲}\left\{۲(ن+۱)^{۲} - ۳ن - ۲\right\}$$

$$= \frac{(ن+۱)}{۲}(۲ن^{۲} + ن)$$

اس لیے $ص_{ن۲} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$

**۷۰ (ا)**۔ پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔
مساوات متماثلہ $(لا+۱)^{۴} - لا^{۴} = ۴لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۴لا + ۱$ میں بالترتیب $لا = ن$، $لا = ن-۱$، ...... $لا = ۲$، $لا = ۱$ رکھنے سے

$$(ن+۱)^{۴} - ن^{۴} = ۴ن^{۳} + ۶ن^{۲} + ۴ن + ۱$$

$$ن^{۴} - (ن-۱)^{۴} = ۴(ن-۱)^{۳} + ۶(ن-۱)^{۲} + ۴(ن-۱) + ۱$$

..............................

$$۲^{۴} - ۱^{۴} = ۴\times۱^{۳} + ۶\times۱^{۲} + ۴\times۱ + ۱$$

جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$(ن+۱)^{۴} - ۱ = ۴ص_{ن۳} + ۶ص_{ن۲} + ۴ص_{ن۱} + ن$$

اب چونکہ $ص_{ن۲}$، $ص_{ن۱}$ کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں، اس لیے

$$۴ص_{ن۳} = (ن+۱)^{۴} - (ن+۱) - ن(ن+۱)(۲ن+۱) - ۲ن(ن+۱)$$

$$= (ن+۱)\left\{(ن+۱)^{۳} - ۱ - ن(۲ن+۱) - ۲ن\right\}$$

$$= (ن+۱)\left\{ن^{۳} + ۳ن^{۲} + ۳ن - ۲ن^{۲} - ن - ۲ن\right\}$$

$$= (ن+۱)(ن^{۳} + ن^{۲})$$

$$= ن^{۲}(ن+۱)^{۲}$$

$$\therefore \text{ص}_{\text{ن}}^{۳} = \frac{\text{ن}^{۲}(\text{ن}+۱)^{۲}}{۴} = \left\{\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}\right\}^{۲}$$

نتیجۂ صریح - پہلے ن طبعی اعداد کی تیسری قوتوں کا حاصل جمع ان کے حاصل جمع کے مربع کے برابر ہوتا ہے۔

نوٹ :- دفعات ۶۸ تا ۷۰ کے ضابطوں کی مدد سے سلسلہ

$$\text{ا}،\ \text{ا}+\text{ف}،\ \text{ا}+۲\text{ف}،\ \ldots\ldots\ldots$$

کی رقموں کے مربعوں کا مجموعہ اور مکعبوں کا مجموعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

**مثال (۱)** ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $۲^{\text{ن}-۱}+۸\text{ن}^{۳}-۶\text{ن}^{۲}$ ہے، اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ حاصل جمع ص ہے۔

$$\text{ص} = ۲^{۰}+۸\times۱^{۳}-۶\times۱^{۲}$$
$$+\,۲^{۱}+۸\times۲^{۳}-۶\times۲^{۲}$$
$$+\,۲^{۲}+۸\times۳^{۳}-۶\times۳^{۲}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\,۲^{\text{ن}-۱}+۸\times\text{ن}^{۳}-۶\times\text{ن}^{۲}$$

جمع کرنے سے $\text{ص} = ۱+۲+۲^{۲}+\ldots\ldots+۲^{\text{ن}-۱}+۸\,\text{ص}_{\text{ن}}^{۳}-۶\,\text{ص}_{\text{ن}}^{۲}$

$$= \frac{۲^{\text{ن}}-۱}{۲-۱} + \frac{۸\text{ن}^{۲}(\text{ن}+۱)^{۲}}{۴} - \frac{۶\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶}$$

$$= ۲^{\text{ن}}-۱+\text{ن}(\text{ن}+۱)\left\{۲\text{ن}(\text{ن}+۱)-(۲\text{ن}+۱)\right\}$$

$$= ۲^{\text{ن}}-۱+\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}^{۲}-۱)$$

**مثال (۲)** سلسلہ $۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\ldots\ldots$ کی ن رقموں تک جمع کرو۔

اس سلسلہ کی ر ویں رقم $= \text{ر}(\text{ر}+۱) = \text{ر}^{۲}+\text{ر}$

اس لیے ن رقموں کا مجموعہ $= \sum_{۱}^{\text{ن}}\text{ر}^{۲} + \sum_{۱}^{\text{ن}}\text{ر}$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}$$

$$=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۶}\left\{۲\text{ن}+۱+۳\right\}$$

$$=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۶}(۲\text{ن}+۴)$$

$$=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)}{۳}$$

مثال (۳) ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کے مکعبوں کی کسی تعداد کا مجموعہ اُن اعداد کے مجموعہ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے اس میں ضروری نہیں کہ اعداد ایک سے شروع ہوں۔

فرض کرو کہ پ + ۱، پ + ۲، پ + ۳، ......... ، پ + ن ن متصل صحیح اعداد ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(\text{پ}+۱)^۳+(\text{پ}+۲)^۳+(\text{پ}+۳)^۳+\cdots\cdots+(\text{پ}+\text{ن})^۳$$

جملہ $(\text{پ}+۱)+(\text{پ}+۲)+(\text{پ}+۳)+\cdots\cdots+(\text{پ}+\text{ن})$ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ص اور ص َ بالترتیب مندرجۂ بالا دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب

$$\text{ص}=\left\{۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots\cdots+(\text{پ}+\text{ن})^۳\right\}$$

$$-\left\{۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots\cdots+\text{پ}^۳\right\}$$

$$=\left\{\frac{(\text{پ}+\text{ن})(\text{پ}+\text{ن}+۱)}{۲}\right\}^۲-\left\{\frac{\text{پ}(\text{پ}+۱)}{۲}\right\}^۲$$

$$=\left\{\frac{(\text{پ}+\text{ن})(\text{پ}+\text{ن}+۱)}{۲}+\frac{\text{پ}(\text{پ}+۱)}{۲}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(\text{پ}+\text{ن})(\text{پ}+\text{ن}+۱)}{۲}-\frac{\text{پ}(\text{پ}+۱)}{۲}\right\}$$

اور ص = {۱ + ۲ + ۳ + ...... + (پ + ن)} - {۱ + ۲ + ۳ + ...... + پ}

= (پ + ن)(پ + ن + ۱)/۲ - پ(پ + ۱)/۲

اس سے ظاہر ہے کہ ن جزو ضربی ہے ص کا جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

مثال (۴) سلسلہ ۱$^{2}$ + ۳$^{2}$ + ۵$^{2}$ + ۷$^{2}$ + ...... کا حاصل جمع ن رقموں تک دریافت کرو۔

دیے ہوئے سلسلہ کی رویں رقم = (۲ر - ۱)$^{2}$ = ۴ر$^{2}$ - ۴ر + ۱

اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ

= ج$_{1}^{ن}$ ۴ر$^{2}$ - ج$_{1}^{ن}$ ۴ر + ن

= ۴ ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)/۶ - ۴ ن(ن + ۱)/۲ + ن

= ۲ن(ن + ۱){(۲ن + ۱)/۳ - ۱} + ن

= ن/۳ {۴(ن$^{2}$ - ۱) + ۳} = ن/۳ (۴ن$^{2}$ - ۱)

مثال (۵) - سلسلہ ۲×۱$^{2}$ + ۳×۲$^{2}$ + ۴×۳$^{2}$ + ...... کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

دیے ہوئے سلسلہ کی رویں رقم = (ر + ۱)ر$^{2}$ = ر$^{3}$ + ر$^{2}$

اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ

= ج$_{1}^{ن}$ ر$^{3}$ + ج$_{1}^{ن}$ ر$^{2}$

= ن$^{2}$(ن + ۱)$^{2}$/۴ + ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)/۶

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۲}\left\{\frac{ن(ن+۱)}{۲}+\frac{۲ن+۱}{۳}\right\}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)}{۲}\times\frac{۳ن^{۲}+۷ن+۲}{۶}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۱)}{۱۲}$$

## ۷۰ ب۔ سلسلوں کے جمع کرنے کی چند خاص صورتیں

امثلۂ ذیل چند کارآمد طریقوں کی توضیح کے لیے منتخب کی گئی ہیں ان کی استعانت سے خاص خاص قسم کے سلسلوں کا مجموعہ بآسانی معلوم ہوسکتا ہے ذیل کے سلسلے دفعات گزشتہ کے سلسلوں سے کئی لحاظ سے مختلف ہیں۔ ان میں بالعموم ن ویں رقم کا دریافت کرنا مشکل ہوگا اس لیے طالب علم کو چاہیے کہ طرزِ عمل کے اس حصہ کو خاص توجہ سے پڑھے۔

مثال۔ سلسلہ $۱ + ۵ + ۱۲ + ۲۲ + ۳۵ + \ldots\ldots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔ [خصوصیت اس سلسلے کی یہ ہے کہ متصلہ رقموں کے متواتر فرق سلسلۂ حسابیہ میں ہیں]

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع مطلوب اور $ق_{ن}$ = ن ویں رقم

تب $ص = ۱ + ۵ + ۱۲ + ۲۲ + \ldots\ldots + ق_{ن}$

نیز $ص = ۰ + ۱ + ۵ + ۱۲ + \ldots\ldots + ق_{ن-۱} + ق_{ن}$

اس لیے تفریق سے

$$۰ = ۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + \ldots\ldots + (ق_{ن} - ق_{ن-۱}) - ق_{ن}$$

$$= \{۱ + ۴ + ۷ + ۱۰ + \ldots\ldots \text{ن ارقام تک}\} - ق_{ن}$$

$$\text{اس لیے } ق_{ن} = \frac{ن}{۲}\{۲ + (ن-۱)۳\} = \frac{ن(۳ن-۱)}{۲}$$

یعنی سلسلۂ معلومہ کی ن ویں رقم $= \frac{۳}{۲} \times ن^{۲} - \frac{۱}{۲} \times ن$

اس لیے $ص = \frac{۳}{۲}(۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \ldots\ldots + ن^{۲})$

$- \frac{۱}{۲}(۱ + ۲ + ۳ + \ldots\ldots + ن)$

$= \frac{۳}{۲} \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} - \frac{۱}{۲} \times \frac{ن(ن+۱)}{۲}$

$= \frac{ن(ن+۱)}{۴} \times ۲ن = \frac{ن^{۲}(ن+۱)}{۲}$

**۷۰ ج۔** مندرجۂ ذیل کا احتیاط سے مطالعہ کرنا چاہیے اس قسم کی تقلیب وترتیب سے ہم کئی قسم کے سلسلے جمع کر سکتے ہیں جن کی رقوم کسری ہوں اور جن کے نسبت نما کسی خاص قانون کے مطابق مرتب کیے گئے ہوں۔

$\frac{۱}{ن(ن+۱)} = \frac{۱}{ن} - \frac{۱}{ن+۱}$ اور $\frac{۱}{لا(لا+و)} = \frac{۱}{و}\left\{\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا+و}\right\}$

$\frac{۱}{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} = \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)}\left\{\frac{۱}{ن(ن+۳)}\right\}$

$= \frac{۱}{۳(ن+۱)(ن+۲)}\left\{\frac{۱}{ن} - \frac{۱}{ن+۳}\right\}$

$\frac{۱}{لا(لا+۳و)(لا+۵و)(لا+۷و)} = \frac{۱}{(لا+۳و)(لا+۵و)}\left[\frac{۱}{لا(لا+۷و)}\right]$

$= \frac{۱}{۷و(لا+۳و)(لا+۵و)}\left[\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا+۷و}\right]$

ہر ایک صورت میں ہر ایک رقم کو دو جملوں کے فرق کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

**مثال (۱)** سلسلہ $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \ldots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع ن ارقام اور $\text{ق}_{\text{ن}}$ = ن ویں رقم

اب $\text{ق}_1 = \frac{1}{1\times 2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$\text{ق}_2 = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{ق}_3 = \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

..............................

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}(\text{ن}+1)} = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

اس لیے　ص $= 1 - \frac{1}{\text{ن}+1} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}$

مثال (۲) سلسلہ $\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \dots$ کو ن ارقام تک جمع کرو۔

ظاہر ہے کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{1}{(3\text{ن}-2)(3\text{ن}+1)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3\text{ن}-2} - \frac{1}{3\text{ن}+1}\right\}$$

اب $\text{ق}_1 = \frac{1}{1\times 4} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

$$\text{ق}_2 = \frac{1}{4\times 7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{ق}_3 = \frac{1}{7\times 10} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)$$

..............................

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{1}{(3\text{ن}-2)(3\text{ن}+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\text{ن}-2} - \frac{1}{3\text{ن}+1}\right)$$

اس لیے ص $= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3\text{ن}+1}\right) = \frac{\text{ن}}{3\text{ن}+1}$

**مثال (۳)** سلسلہ $\frac{۱}{۱\times۴\times۷}+\frac{۱}{۴\times۷\times۱۰}+\frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳}+\cdots\cdots$

کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

یہاں $\text{ق}_{\text{ن}}=\frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$

$$=\frac{۱}{۶}\left\{\frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)}-\frac{۱}{(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}\right\}$$

اب $\text{ق}_{۱}=\frac{۱}{۱\times۴\times۷}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۱\times۴}-\frac{۱}{۴\times۷}\right)$

$$\text{ق}_{۲}=\frac{۱}{۴\times۷\times۱۰}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۴\times۷}-\frac{۱}{۷\times۱۰}\right)$$

$$\text{ق}_{۳}=\frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۷\times۱۰}-\frac{۱}{۱۰\times۱۳}\right)$$

..............................................

$$\text{ق}_{\text{ن}}=\frac{۱}{۶}\left\{\frac{۱}{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}+۱)}-\frac{۱}{(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}\right\}$$

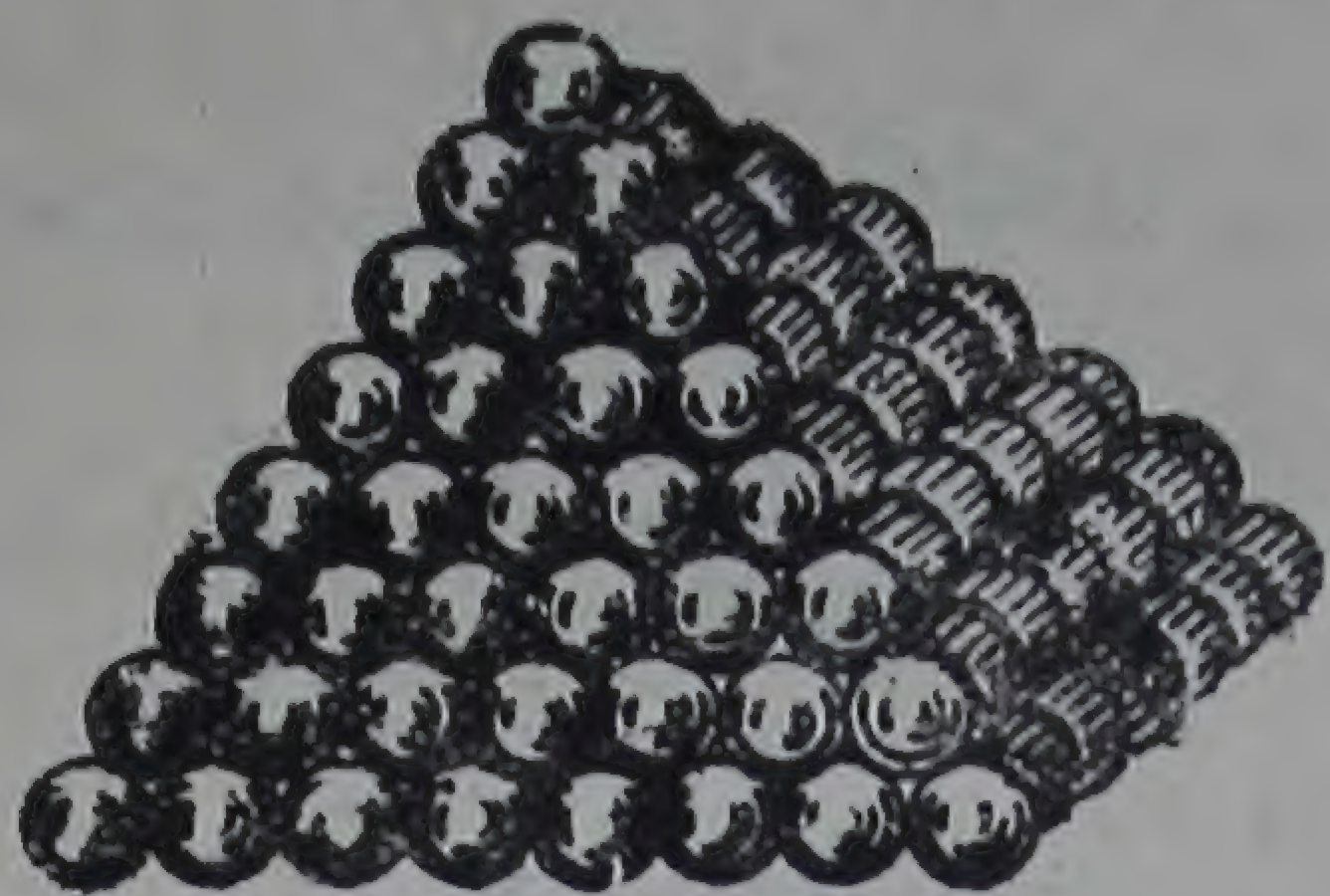
اس لیے $\text{ص}=\frac{۱}{۶}\left\{\frac{۱}{۱\times۴}-\frac{۱}{(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}\right\}$

$$=\frac{۱}{۶}\times\frac{۹\text{ن}^{۲}+۱۵\text{ن}}{۴(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$$

$$=\frac{\text{ن}(۳\text{ن}+۵)}{۸(۳\text{ن}+۱)(۳\text{ن}+۴)}$$

## گولیوں کے انبار

۱۷ - ایک مکمل مینار (مخروطِ مضلّع) کی شکل میں جو مربع قاعدہ پر قائم

ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ن گولیاں ہیں سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد ن$^{۲}$ ہوگی۔ اس سے اوپر کی تہ میں (ن - ۱)$^{۲}$ اور اس سے اوپر کی تہ میں (ن - ۲)$^{۲}$ اور علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ چوٹی پر صرف ایک گولی ہوگی

اس لیے تعداد مطلوبہ ص = ن$^{۲}$ + (ن-۱)$^{۲}$ + (ن - ۲)$^{۲}$ + ...... + ۱

$$= \frac{\text{ن (ن + ۱) (۲ ن + ۱)}}{۶}$$ [دفعہ ۶۹]

۲۷۔ ایک ایسے مکمل مینار کی شکل میں جس کا قاعدہ مثلث متساوی الاضلاع ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ن گولیاں ہیں سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد

= ن + (ن - ۱) + (ن - ۲) + .... + ۱

$$= \frac{\text{ن (ن + ۱)}}{۲}$$ یا $\frac{۱}{۲}$ (ن$^{۲}$ + ن)

اگر ہم اس نتیجے میں ن کی بجائے ن-۱، ن-۲، ن- ۳ وغیرہ رکھیں تو ہمیں بالترتیب دوسری، تیسری، چوتھی تہ میں گولیوں کی تعداد معلوم ہو جائے گی۔

اس لیے ن تہوں والے مکمل مثلثی مینار میں گولیوں کی تعداد

= $\frac{۱}{۲}$ {ن$^{۲}$ + (ن - ۱)$^{۲}$ + ...... + ۲$^{۲}$ + ۱$^{۲}$} - $\frac{۱}{۲}$ {ن + (ن - ۱) + ..... + ۲ + ۱}

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{12} \left\{ (2\text{ن}+1) + 3 \right\}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{6}$$

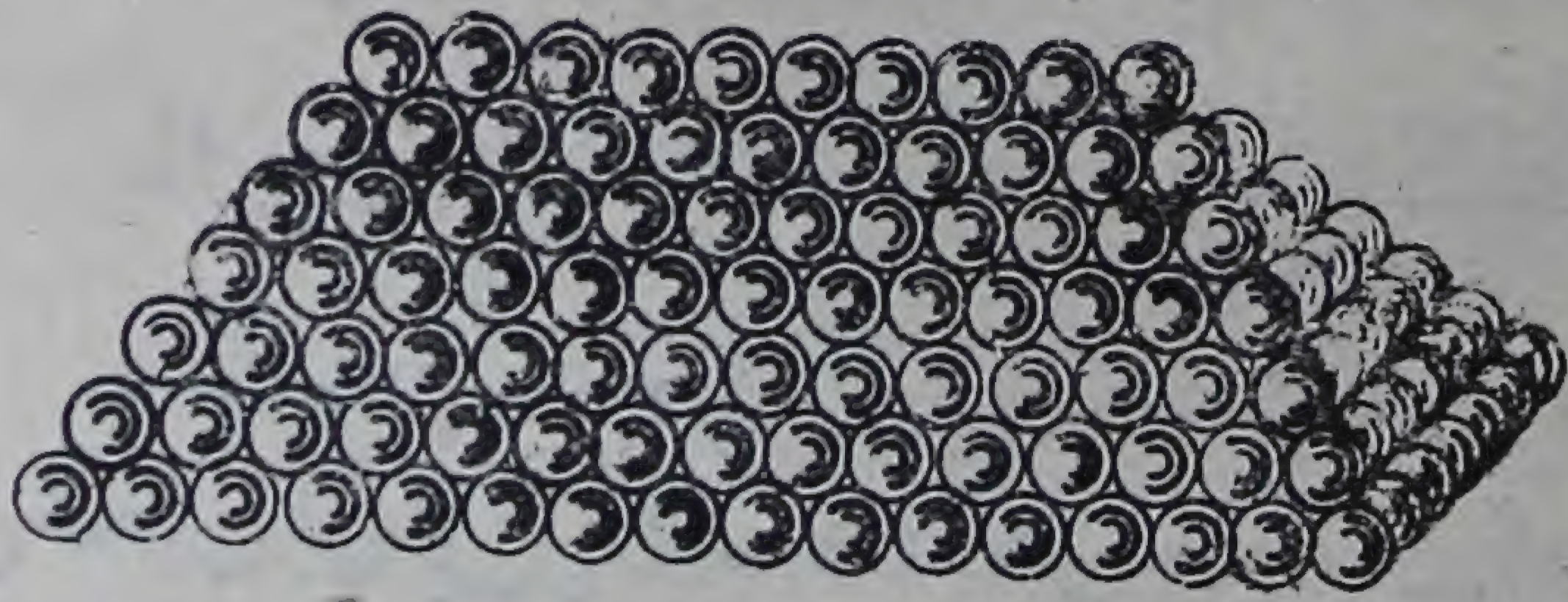
**۷۳**۔ گولیوں کا ایک مکمل انبار مستطیلی قاعدے پر کھڑا ہے، اس میں کُل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدے کے بڑے اور چھوٹے ضلع میں بالترتیب م اور ن گولیاں ہیں۔

سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی صرف ایک قطار ہے جس میں م ـ (ن ـ ۱) یعنی (م ـ ن + ۱) گولیاں ہیں۔

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۲(م ـ ن + ۲)

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۳(م ـ ن + ۳) اور

علیٰ ہذا القیاس سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ن(م ـ ن + ن)

اس لیے

$$\text{ص} = (\text{م}-\text{ن}+1) + 2(\text{م}-\text{ن}+2) + 3(\text{م}-\text{ن}+3) + \cdots + \text{ن}(\text{م}-\text{ن}+\text{ن})$$

$$= (\text{م}-\text{ن})(1+2+3+\cdots+\text{ن}) + (1^2+2^2+3^2+\cdots+\text{ن}^2)$$

$$=\frac{(م-ن)ن(ن+۱)}{۲}+\frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

$$=\frac{ن(ن+۱)}{۶}\{۳(م-ن)+۲ن+۱\}=\frac{ن(ن+۱)(۳م-ن+۱)}{۶}$$

۷۴۔ گولیوں کا ایک نامکمل انبار ایک مستطیلی قاعدہ پر کھڑا ہے اُس میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سب سے اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں گولیوں کی تعداد بالترتیب ا اور ب ہے اور انبار میں کُل تہوں کی تعداد ن ہے تو سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد = اب

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (ا+۱)(ب+۱)

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (ا+۲)(ب+۲)

اسی طرح اوپر سے ر ویں تہ میں گولیوں کی تعداد

$$=\{ا+(ر-۱)\}\{ب+(ر-۱)\}$$

$$=اب+(ا+ب)(ر-۱)+(ر-۱)^۲$$

اِس لیے نامکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد

$$=اب\,ن+(ا+ب)\,\text{مج}_۱^ن(ر-۱)+\text{مج}_۱^ن(ر-۱)^۲$$

$$=اب\,ن+\frac{(ن-۱)ن(ا+ب)}{۲}+\frac{(ن-۱)ن(۲\times\overline{ن-۱}+۱)}{۶}$$

$$=\frac{ن}{۶}\{۶اب+۳(ا+ب)(ن-۱)+(ن-۱)(۲ن-۱)\}$$

۷۵۔ عددی مثالوں میں ذیل کی ترکیب کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔

**مثال**۔ گولیوں کا ایک نامکمل انبار مربع قاعدے پر کھڑا ہے، اس میں ۶ تہیں ہیں، سب سے اوپر کی تہ کے ہر ایک ضلع میں ۱۲ گولیاں ہیں، انبار میں کُل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

اگر ہم اس انبار پر ایک اور مربع انبار جس کے قاعدے کے ہر ایک

ضلع میں ۱۱ گولیاں ہوں رکھ دیں تو ہمیں ۲۷ تہوں کا ایک مکمل مربع انبار حاصل ہوگا۔

اس مکمل انبار میں گولیوں کی تعداد $= \frac{۵۵ \times ۲۸ \times ۲۷}{۶} = ۶۹۳۰$

اُن گولیوں کی تعداد جو نامکمل ڈھیر کے اوپر رکھی گئی ہیں۔

$$= \frac{۲۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۶} = ۵۰۶$$

اس لیے نامکمل انبار میں گولیوں کی تعداد $= ۶۴۲۴$

# امثلہ نمبری ۶ ب

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۱۔ $۵^۲ + ۷^۲ + ۹^۲ + \ldots\ldots + ۲۵^۲$

۲۔ $۲^۲ + ۵^۲ + ۸^۲ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۳۔ $۱ \times ۲^۲ + ۲ \times ۳^۲ + ۳ \times ۴^۲ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۴۔ $۲ \times ۵ + ۵ \times ۸ + ۸ \times ۱۱ + ۱۱ \times ۱۴ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۵۔ $۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۵ \times ۷ + ۷ \times ۹ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۶۔ $۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۷۔ $۱^۳ + ۳^۳ + ۵^۳ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۸۔ $۱ + (۱+۲) + (۱+۲+۳) + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

۹۔ ن ویں رقم $۳ن^۲ - ن$ ہے

۱۰۔ ن ویں رقم $ن^۳ + \frac{۳}{۲} ن$ ہے

۱۱۔ ن ویں رقم $ن (ن + ۲)$ ہے

۱۲۔ ن ویں رقم $ن^۲ (۲ن + ۳)$ ہے

۱۳۔ ن ویں رقم $۳^ن - ۲^ن$ ہے

۱۴۔ ن ویں رقم $۳ (۴^ن + ۲ن^۲) - ۴ن^۳$ ہے۔

۱۵- ن ویں رقم ۴ن (ن$^{۲}$+۱) - (۶ن$^{۲}$+۱) ہے۔

۱۶- اگر ایک سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ ا+ب ن+ج ن$^{۲}$ ہو تو ن ویں رقم اور سلسلہ کی نوعیت معلوم کرو۔

۱۷- ۱+۳+۶+۱۰+۱۵+ ............ کو ن رقموں تک

۱۸- ۱+۶+۱۵+۲۸+۴۵+ ............ کو ن " "

۱۹- ۱+۸+۲۱+۴۰+۶۵+ ............ کو ن " "

۲۰- ۱+۹+۲۴+۴۶+۷۵+ ............ کو ن " "

۲۱- ۱+۱۰+۲۷+۵۲+۸۵+ ............ کو ن " "

۲۲- ۶+۱۷+۳۴+۵۷+۸۶+ ............ کو ن " "

۲۳- ۲+۳+۶+۱۱+۱۸+ ............ کو ن " "

۲۴- ۲+۵+۱۰+۱۷+ ............ کو ن " "

۲۵- $\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\frac{۱}{۷\times۹}+$ ...... کو ن " "

۲۶- $\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۲\times۴}+\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۴\times۶}+$ ... کو ۲۹ " "

۲۷- $\frac{۱}{۳\times۷}+\frac{۱}{۷\times۱۱}+\frac{۱}{۱۱\times۱۵}+$ ........ کو ن ارقام تک

۲۸- $\frac{۱}{۱\times۳\times۵}+\frac{۱}{۳\times۵\times۷}+\frac{۱}{۵\times۷\times۹}+$ .... کو ن " "

گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۹- ایک مربع انبار میں جس کے قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۱۵ گولیاں ہیں۔

۳۰- ایک مثلثی انبار میں جس کے قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۱۸ گولیاں ہیں۔

۳۱- ایک مستطیلی انبار میں جس کے قاعدہ کے طول اور عرض میں بالترتیب ۵۰ اور ۲۸ گولیاں ہیں۔

۳۲- ایک ایسے نامکمل مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔ جس کے

قاعدہ کے ایک ضلع میں ۲۵ گولیاں ہیں اور سب سے اوپر کی تہ کے ایک ضلع میں ۱۴ گولیاں ہیں۔

۳۳- ایک ناکمل مربع انبار میں ۲۷ تہیں ہیں اور قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۴۰ گولیاں ہیں۔ گولیوں کی کُل تعداد دریافت کرو۔

۳۴- ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد ۲۴۳۹۵ ہے اگر قاعدہ کے عرض میں ۳۴ گولیاں ہوں تو طول میں کتنی گولیاں ہونگی؟

۳۵- کسی مربع انبار کی سب سے اونچی تہ میں گولیوں کی تعداد ۱۶۹ ہے اور سب سے نچلی تہ میں ۱۰۸۹ تو معلوم کرو کہ کُل انبار میں کتنی گولیاں ہیں۔

۳۶- ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی ۱۵ تہیں ہیں اور قاعدہ کے بڑے ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں تو معلوم کرو کہ انبار میں کُل گولیاں کتنی ہیں؟

۳۷- ایک ناکمل مستطیلی انبار کی سب سے اونچی تہ کے دو اضلاع میں ۱۱ اور ۱۸ گولیاں ہیں اور سب سے نچلی تہ کے چھوٹے ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۸- ایک ناکمل مستطیلی انبار کی اوپر کی تہ کے اضلاع میں ۱۵ اور ۶ گولیاں ہیں، معلوم کرو کہ کتنی اور گولیاں انبار کی تکمیل کے لیے کافی ہونگی۔

۳۹- ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد ایک مربع انبار کی گولیوں کی نصف تعداد سے بقدر ۱۵۰ کے زیادہ ہے اور ہر ایک انبار میں تہوں کی تعداد یکساں ہے۔ مثلثی انبار کی سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۰- ایک ناکمل مربع انبار میں ۱۶ تہیں ہیں۔ اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد نچلی تہ کی تعداد سے بقدر ۱۰۰۵ کے کم ہے۔ انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۱- ثابت کرو کہ ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد اس سے دو چند تہوں والے مثلثی انبار کی گولیوں کی تعداد کی ایک چوتھائی ہے۔

۴۲۔ اگر ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد کو ان گولیوں کی تعداد سے جو ایک مربع انبار میں شامل ہیں ۱۳ : ۱۷۵ کی نسبت ہو اور مثلثی انبار کی نسبت مربع انبار میں تہوں کی تعداد دو چند ہو تو ہر ایک انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۳۔ ۱۶ پونڈ وزنی گولیوں کے ایک مثلثی انبار کی قیمت ۵۱ پونڈ ہے اگر ایک ہنڈرویٹ لوہے کی قیمت ۱۰ شلنگ ۶ پنس ہو تو سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۴۔ اگر ایک مکمل مربع انبار سے جس میں ن تہیں ہیں گولیاں لے کر ایک ایسا مثلثی انبار بنایا جائے جس میں تہوں کی تعداد وہی ہو جو مربع انبار میں ہے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ گولیوں سے ایک دوسرا مثلثی انبار بن سکتا ہے۔ اس انبار کے قاعدے کے ضلع میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

# باب ہفتم

## مقادیر اصم

۷۶۔ **تعریفات**۔ اگر کسی عددِ حسابی ع کا جذر ٹھیک ٹھیک دریافت نہ ہو سکے تو اس عدد کے جذر کو مقدارِ اصم یا غیر ناطق کہتے ہیں مثلاً $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[4]{5}$ مقادیر اصم ہیں۔

نوٹ۔ اگر کسی عددِ حسابی کا جذر پورا پورا نکل سکے تو اس جذر کو مقدارِ ناطق یا منطق کہتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ ہر ایک عددِ حسابی کا جذر یا تو ناطق ہوگا یا غیر ناطق مثلاً $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt{25}$ ، $\sqrt[4]{16}$ ناطق ہیں اور مقادیر $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt[4]{9}$ غیر ناطق ہیں۔

$\sqrt{لا}$ کی صورت کے جبریہ جملے کو ہمیشہ مقدارِ اصم کہتے ہیں خواہ لا کی قیمت کامل مربع ہو یا نہ ہو۔

دو یا زیادہ مقادیر اصم کو متشابہ کہتے ہیں اگر اُن کی تحویل ایک ہی جزوِ ضربی اصم کی طرف ہو سکے مثلاً $\sqrt{45}$ اور $\sqrt{80}$ متشابہ مقادیر اصم ہیں کیونکہ وہ جداگانہ $3\sqrt{5}$ اور $4\sqrt{5}$ کے برابر ہیں۔

ایک ایسے جملے کو جس میں دو یا زیادہ مفرد مقادیر اصم علامات + اور - سے مربوط ہوں مرکب اصم کہتے ہیں مثلاً $5\sqrt{2}$ اور $4\sqrt{3}$ مفرد مقادیر اصم ہیں لیکن $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ اور $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ مرکب مقادیر اصم ہیں۔

اگر درجۂ دوم کے دو ثنائی مرکب اصم جملوں میں ارقام ایک ہی ہوں مگر وہ علامات جس کے ذریعے اُن کی دونوں رقمیں مربوط ہیں مختلف ہوں تو انہیں ایک دوسرے کا زوج کہتے ہیں اور ان دونوں کا حاصل ضرب منطق ہے مثلاً $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ کا زوج $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ ہے اور ان دونوں کا حاصل ضرب ۱ ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ شکل $\frac{ا}{\sqrt{ب} + \sqrt{ج}}$ کے جملہ کا نسب نما منطق بن جاتا ہے اگر ہم کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نسب نما کے زوج $\sqrt{ب} - \sqrt{ج}$ سے ضرب دیں۔

نیز ایک ایسی کسر کا نسب نما جس میں تین مقادیر اصم درجۂ دوم شامل ہوں ناطق بن سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسر مجوزہ $\frac{ا}{\sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د}}$ ہے اگر اس کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{ب} + \sqrt{ج} - \sqrt{د}$ سے ضرب دیں تو اس عمل کے بعد نئی کسر کا نسب نما $(\sqrt{ب} + \sqrt{ج})^{۲} - (\sqrt{د})^{۲}$ یعنی $ب + ج - د + ۲\sqrt{ب ج}$ ہوگا۔ اب اگر ایک اور دفعہ شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نئے نسب نما کے زوج $(ب + ج - د) - ۲\sqrt{ب ج}$ سے ضرب دیں تو اس سے نسب نما ناطق بن جائیگا۔ یعنی آخری نسب نما $= (ب + ج - د)^{۲} - ۴ ب ج$ جو ایک مقدار ناطق ہے۔

مثال۔ مختصر کرو $\frac{۱۲}{۳ + \sqrt{۵} - ۲\sqrt{۲}}$

$$\text{جملہ} = \frac{۱۲(۳ + \sqrt{۵} + ۲\sqrt{۲})}{(۳ + \sqrt{۵})^{۲} - (۲\sqrt{۲})^{۲}} = \frac{۱۲(۳ + \sqrt{۵} + ۲\sqrt{۲})}{۶ + ۶\sqrt{۵}}$$

$$= \frac{۲(۳ + \sqrt{۵} + ۲\sqrt{۲})(\sqrt{۵} - ۱)}{(\sqrt{۵} + ۱)(\sqrt{۵} - ۱)}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}$$

**۷۷۔ جملہ ثنائی اصم کا منطق جزوِ ضربی دریافت کرو۔**

(۱) جملہ ثنائی کی صورتِ عامہ جس میں صرف دو مقادیر اصم درجۂ دوم شامل ہوں $\text{ا}\sqrt{\text{ف}} + \text{ب}\sqrt{\text{ق}}$ ہے۔ کیونکہ اگر ف مربع کامل ہو تو اِس خاص صورت میں اس کی شکل $\text{ع} + \text{ب}\sqrt{\text{ق}}$ ہوگی جہاں ع اور ب دونوں مقادیر ناطق رہیں۔

ظاہر ہے کہ جملہ $\text{ا}\sqrt{\text{ف}} + \text{ب}\sqrt{\text{ق}}$ کا منطق جزوضربی $\text{ا}\sqrt{\text{ف}} - \text{ب}\sqrt{\text{ق}}$ ہے کیونکہ اگر $\text{م} = \text{ا}\sqrt{\text{ف}} + \text{ب}\sqrt{\text{ق}}$

تو $\text{م}(\text{ا}\sqrt{\text{ف}} - \text{ب}\sqrt{\text{ق}}) = (\text{ا}\sqrt{\text{ف}})^2 - (\text{ب}\sqrt{\text{ق}})^2$

$= \text{ا}^2\text{ف} - \text{ب}^2\text{ق}$ جو ایک مقدار ناطق ہے۔

(۲) جملہ ثنائی اصم کی صورت عامہ $\sqrt[\text{ف}]{\text{ا}} + \sqrt[\text{ق}]{\text{ب}}$ ہے یا $\sqrt[\text{ف}]{\text{ا}} - \sqrt[\text{ق}]{\text{ب}}$

مثلاً $3^{\frac{3}{5}} + 2^{\frac{4}{7}} = \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[7]{2^4} = \sqrt[5]{27} + \sqrt[7]{16}$

اور $2^{\frac{4}{5}} - 3^{\frac{4}{11}} = \sqrt[5]{2^4} - \sqrt[11]{3^4} = \sqrt[5]{16} - \sqrt[11]{81}$

اس سے معلوم ہوا کہ جملہ ثنائی اصم $\text{د ل}^{\frac{\text{ع}}{\text{ج}}} \pm \text{ر م}^{\frac{\text{ق}}{\text{ط}}}$ کی تحویل ہمیشہ صورت عامہ $\sqrt[\text{ف}]{\text{ا}} \pm \sqrt[\text{ق}]{\text{ب}}$ کی طرف ہوسکتی ہے اس لیے ہم اس کا منطق جزوضربی دریافت کرتے ہیں۔

صورتِ اول۔ فرض کرو کہ ثنائی اصم $\sqrt[\text{ف}]{\text{ا}} - \sqrt[\text{ق}]{\text{ب}}$ دیا ہوا ہے اور اس کا منطق جزوضربی مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt[\text{ف}]{\text{ا}} = \text{لا}$ اور $\sqrt[\text{ق}]{\text{ب}} = \text{ما}$ اور فرض کرو کہ ف اور ق کا

ذواضعاف اقل ن ہے تب ظاہر ہے کہ $لا^{ن}$ اور $ما^{ن}$ دونوں ناطق ہیں۔ اب ن کی تمام قیمتوں کے لیے $لا^{ن} - ما^{ن}$ جملہ لا - ما پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اور

$$لا^{ن} - ما^{ن} = (لا - ما)(لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲}ما + لا^{ن-۳}ما^{۲} + \ldots\ldots + ما^{ن-۱})$$

پس ظاہر ہے کہ منطق جزو ضربی مطلوب

$لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲}ما + لا^{ن-۳}ما^{۲} + \ldots + ما^{ن-۱}$ ہے اور منطق حاصل ضرب $لا^{ن} - ما^{ن}$ ہے۔

**صورت دوم** - فرض کرو کہ دیا ہوا ثنائی اصم $\sqrt[ف]{ا} + \sqrt[ق]{ب}$ ہے نیز لا، ما، ن کے معنی وہی ہیں جو اوپر بیان ہوئے۔ تب

(ا) اگر ن جفت ہو تو لا + ما پر $لا^{ن} - ما^{ن}$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے

یعنی $لا^{ن} - ما^{ن} = (لا + ما)(لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}ما + \ldots + لاما^{ن-۲} - ما^{ن-۱})$

پس اس صورت میں منطق جزو ضربی $لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}ما + \ldots + لاما^{ن-۲} - ما^{ن-۱}$ ہے اور ناطق حاصل ضرب $لا^{ن} - ما^{ن}$

(ب) اگر ن طاق ہو تو لا + ما پر $لا^{ن} + ما^{ن}$ پورا پورا تقسیم ہو سکتا ہے

اور $لا^{ن} + ما^{ن} = (لا + ما)(لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}ما + \ldots - لاما^{ن-۲} + ما^{ن-۱})$

پس منطق جزو ضربی $لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}ما + \ldots\ldots - لاما^{ن-۲} + ما^{ن-۱})$ ہے اور ناطق حاصل ضرب $لا^{ن} + ما^{ن}$

**مثال** - $\sqrt{۳} + \sqrt[۳]{۵}$ کا منطق جزو ضربی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $لا = ۳^{\frac{۱}{۲}}$، $ما = ۵^{\frac{۱}{۳}}$ تو $لا^{۶}$ اور $ما^{۶}$ دونوں ناطق ہیں۔

$$لا^{۶} - ما^{۶} = (لا + ما)(لا^{۵} - لا^{۴}ما + لا^{۳}ما^{۲} - لا^{۲}ما^{۳} + لاما^{۴} - ما^{۵})$$

پس منطق جزو ضربی مطلوب ہے لا^۵ ـ لا^۴ ما + لا^۳ ما^۲ ـ لا^۲ ما^۳ + لا ما^۴ ـ ما^۵

$= ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۳^{\frac{۴}{۲}} \times ۵^{\frac{۱}{۳}} + ۳^{\frac{۳}{۲}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} - ۳^{\frac{۲}{۲}} \times ۵^{\frac{۳}{۳}} + ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{\frac{۴}{۳}} - ۵^{\frac{۵}{۳}}$ کیونکہ

لا = $۳^{\frac{۱}{۲}}$ اور ما = $۵^{\frac{۱}{۳}}$

$= ۳^{\frac{۵}{۲}} - ۹ \times ۵^{\frac{۱}{۳}} + ۳^{\frac{۳}{۲}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} - ۱۵ + ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{\frac{۴}{۳}} - ۵^{\frac{۵}{۳}}$

اور ناطق حاصل ضرب = $۳^{\frac{۶}{۲}} - ۵^{\frac{۶}{۳}} = ۳^{۳} - ۵^{۲} = ۲$

## مثال ۲۔ کسر $\frac{۵^{\frac{۱}{۲}} + ۹^{\frac{۱}{۸}}}{۵^{\frac{۱}{۲}} - ۹^{\frac{۱}{۸}}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

نسب نما = $۵^{\frac{۱}{۲}} - ۹^{\frac{۱}{۸}} = ۵^{\frac{۱}{۲}} - ۳^{\frac{۱}{۴}}$

فرض کرو کہ $۵^{\frac{۱}{۲}}$ = لا اور $۳^{\frac{۱}{۴}}$ = ما تب نسب نما = لا ـ ما

چونکہ لا^۴ ـ ما^۴ = (لا ـ ما) (لا^۳ + لا^۲ ما + لا ما^۲ + ما^۳)

نسب نما کا منطق جزو ضربی = $۵^{\frac{۳}{۲}} + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + ۳^{\frac{۳}{۴}}$

اور ناطق نسب نما = $۵^{\frac{۴}{۲}} - ۳^{\frac{۴}{۴}} = ۵^{۲} - ۳ = ۲۲$

∴ دی ہوئی کسر = $\frac{(۵^{\frac{۳}{۲}} + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + ۳^{\frac{۳}{۴}})(۵^{\frac{۱}{۲}} + ۳^{\frac{۱}{۴}})}{۲۲}$

$= \frac{۵^{\frac{۴}{۲}} + ۵^{\frac{۳}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} \times ۲ + ۵^{\frac{۲}{۲}} \times ۳^{\frac{۲}{۴}} \times ۲ + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}} \times ۲ + ۳^{\frac{۴}{۴}}}{۲۲}$

$= \frac{۵^{\frac{۳}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} + ۵ \times ۳^{\frac{۲}{۴}} + ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۳}{۴}} + ۱۴}{۱۱}$

۸۷۔ کسی مقدار ناطق کے جذر المربع کا کچھ حصہ ناطق اور کچھ حصہ اصم درجہ دوم نہیں ہو سکتا۔

بشرط امکان فرض کرو کہ $\sqrt{ا}$ = ل + $\sqrt{م}$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ن} = \text{ا}^{۲} + \text{م} + ۲\,\text{ا}\sqrt{\text{م}}$

جس سے $\sqrt{\text{م}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ا}^{۲} - \text{م}}{۲\,\text{ا}}$

یعنی ایک مقدار اصم مقدارِ ناطق کے برابر ہوئی اور یہ باطل ہے۔

۷۹۔ اگر $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$ جہاں مقادیر ا اور لا ناطق ہیں اور $\sqrt{\text{ب}}$ اور $\sqrt{\text{ما}}$ غیر ناطق تو ثابت کرو کہ ا = لا اور ب = ما

اگر ا اور لا برابر نہ ہوں تو فرض کرو کہ ا = لا + م

تب $\text{لا} + \text{م} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$

اس لیے $\text{م} + \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ما}}$

یعنی $\sqrt{\text{ما}}$ کا کچھ حصہ ناطق ہے اور کچھ حصہ غیر ناطق جو بموجب دفعہ سابق ناممکن ہے۔

اس لیے ا = لا اور $\sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{ما}}$ یعنی ب = ما

**نوٹ**۔ یاد رہے کہ نتیجہ مندرجۂ بالا صرف اُس صورت میں صحیح ہو سکتا ہے جبکہ مقادیر $\sqrt{\text{ب}}$ اور $\sqrt{\text{ما}}$ فی الحقیقت غیر ناطق ہوں مثلاً ربط $۵ + \sqrt{۹} = ۳ + \sqrt{۲۵}$ سے ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ ۵ = ۳ اور ۹ = ۲۵

۸۰۔ $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}$ کا جذر دریافت کرو جہاں $\sqrt{\text{ب}}$ مقدار اصم ہے

فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \text{ما} + ۲\sqrt{\text{لاما}}$

اس لیے دفعہ گزشتہ کی مدد سے

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ا} = \text{لا} + \text{ما} \\ \sqrt{\text{ب}} = ۲\sqrt{\text{لاما}} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس لیے $\text{ا}^{۲} - \text{ب} = (\text{لا} + \text{ما})^{۲} - ۴\,\text{لاما} = (\text{لا} - \text{ما})^{۲}$

$\therefore \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ب}} = \text{لا} - \text{ما}$

پس ہمیں حاصل ہوا $\text{لا} + \text{ما} = \text{ا}$

اور $\text{لا} - \text{ما} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}$

جمع اور تفریق سے

$۲\,\text{لا} = \text{ا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}$ اور $۲\,\text{ما} = \text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}$

$$\therefore \sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}\right)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}}\right)}$$

**نوٹ**۔ لا اور ما کی قیمتیں جو ہم نے اوپر معلوم کیں وہ اصلی جملہ سے بھی زیادہ پیچیدہ ہیں اس لیے اگر $\text{ا}^2 - \text{ب}$ مربع کامل نہ ہو تو وہ عملی سوالات میں اتنی کارآمد نہیں ہوتیں۔

**نتیجہ صریح** (۱) سے $\text{ا} - \sqrt{\text{ب}} = \text{لا} + \text{ما} - ۲\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}} = \left(\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}\right)^2$

$$\therefore \sqrt{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}$$

پس معلوم ہوا کہ اگر $\sqrt{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

تو $\sqrt{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ما}}$

**مثال**۔ $\sqrt{۷ + ۲\sqrt{۱۰}} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$

طرفین کا مربع لینے سے $۷ + ۲\sqrt{۱۰} = \text{لا} + \text{ما} + ۲\sqrt{\text{لا}\,\text{ما}}$

اس لیے $\text{لا} + \text{ما} = ۷$ اور $\text{لا}\,\text{ما} = ۱۰$

اعداد ۵ اور ۲ سے شرائط معادلات بالا پوری ہوتی ہیں اس لیے

جذر مطلوب $= \sqrt{۵} + \sqrt{۲}$

**۸۱**۔ بعض اوقات ہم ایسے جملہ کا جذر نکال سکتے ہیں جس میں دو سے زیادہ مقادیر اصم درجۂ دوم شامل ہوں، اس کی توضیح عمل ذیل سے ہوگی۔

فرض کرو کہ جملہ $\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{ج}} + \sqrt{\text{د}}$ کا جذر نکالنا مطلوب ہے

فرض کرو کہ $\sqrt{ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د}} = \sqrt{لا} + \sqrt{ما} + \sqrt{ی}$

∴ $ا + \sqrt{ب} + \sqrt{ج} + \sqrt{د} = لا + ما + ی + ۲\sqrt{لا ما} + ۲\sqrt{لا ی} + ۲\sqrt{ما ی}$

اب اگر $۲\sqrt{لا ما} = \sqrt{ب}$، $۲\sqrt{لا ی} = \sqrt{ج}$، $۲\sqrt{ما ی} = \sqrt{د}$ ........(۱)

اور ساتھ ہی اگر لا، ما، ی کی قیمتیں جو ہم (۱) سے دریافت کریں مساوات
$لا + ما + ی = ا$ کو پورا کریں تو ہمیں جذر مطلوب حاصل ہو جائے گا۔

مثال۔ $۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵}$ کا جذر نکالو

فرض کرو کہ $\sqrt{۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵}} = \sqrt{لا} + \sqrt{ما} - \sqrt{ی}$

اس لیے $۲۱ - ۴\sqrt{۵} + ۸\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۱۵} = لا + ما + ی + ۲\sqrt{لا ما} - ۲\sqrt{لا ی} - ۲\sqrt{ما ی}$

فرض کرو کہ $۲\sqrt{لا ما} = ۸\sqrt{۳}$، $۲\sqrt{لا ی} = ۴\sqrt{۱۵}$، $۲\sqrt{ما ی} = ۴\sqrt{۵}$

سب کو اکٹھا ضرب دینے سے $لا ما ی = ۲۴۰$ یعنی $\sqrt{لا ما ی} = ۴\sqrt{۱۵}$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sqrt{لا} = ۲\sqrt{۳}$، $\sqrt{ما} = ۲$ اور $\sqrt{ی} = \sqrt{۵}$

چونکہ یہ قیمتیں مساوات $لا + ما + ی = ۲۱$ کو پورا کرتی ہیں

اس لیے جذر مطلوب $۲\sqrt{۳} + ۲ - \sqrt{۵}$ ہے۔

۴۸۔ اگر $\sqrt[۳]{ا + \sqrt{ب}} = لا + \sqrt{ما}$ تو ثابت کرو کہ $\sqrt[۳]{ا - \sqrt{ب}} = لا - \sqrt{ما}$

دیے ہوئے رشتہ کے طرفین کو تیسری قوت پر اٹھانے سے

$$ا + \sqrt{ب} = لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ما^{\frac{۱}{۲}} + ۳ لا ما + ما^{\frac{۳}{۲}}$$

ناطق اور غیر ناطق حصوں کو آپس میں برابر رکھنے سے

$$ا = لا^{۳} + ۳ لا ما،\quad \sqrt{ب} = ۳ لا^{۲} \sqrt{ما} + ما\sqrt{ما}$$

$$\therefore ا - \sqrt{ب} = لا^{۳} - ۳ لا^{۲}\sqrt{ما} + ۳ لا ما - ما\sqrt{ما} = (لا - \sqrt{ما})^{۳}$$

یعنی $\sqrt[۳]{ا - \sqrt{ب}} = لا - \sqrt{ما}$

اسی طرح مسئلہ ثنائی کی استعانت سے ہم ثابت کرتے ہیں کہ اگر

$\sqrt[\text{ن}]{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$ تو $\sqrt[\text{ن}]{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$ جہاں ن کوئی صحیح مثبت عدد ہے۔

**٨٣**۔ ترکیب ذیل $\text{ا} \pm \sqrt{\text{ب}}$ کی صورت کے جملوں کے جذر الکعب بعض اوقات دریافت ہوسکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } \sqrt[3]{\text{ا} + \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$$

$$\text{تب } \sqrt[3]{\text{ا} - \sqrt{\text{ب}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$$

$$\text{اس لیے } \sqrt[3]{\text{ا}^2 - \text{ب}} = \text{لا}^2 - \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{نیز بموجب دفعہ گزشتہ } \text{ا} = \text{لا}^3 + 3\,\text{لا}\,\text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب لا اور ما کی قیمتیں (١) اور (٢) سے ذیل کے طریقہ سے دریافت کرتے ہیں (١) میں فرض کرو کہ $\sqrt[3]{\text{ا}^2 - \text{ب}} = \text{ج}$ تب ما کی قیمت (٢) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\text{ا} = \text{لا}^3 + 3\,\text{لا}\,(\text{لا}^2 - \text{ج})$$

$$\text{یعنی } 4\,\text{لا}^3 - 3\,\text{ج}\,\text{لا} = \text{ا}$$

اگر مساوات میں بطور آزمایش مختلف قیمتیں رکھنے سے لا کی ایک قیمت مل جائے تو ما کی قیمت مساوات $\text{ما} = \text{لا}^2 - \text{ج}$ سے معلوم ہوسکیگی۔

**نوٹ**۔ ہم یہاں جذر الکعب مطلوب کو $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}}$ کی شکل میں نہیں رکھتے کیونکہ اگر اس کو تیسری قوت پر اٹھایا جائے تو

$$\text{ا} + \sqrt{\text{ب}} = \text{لا}\sqrt{\text{لا}} + 3\,\text{لا}\sqrt{\text{ما}} + 3\,\text{ما}\sqrt{\text{لا}} + \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$$

اب چونکہ بائیں طرف کی ہر ایک رقم اصم ہے اس لیے ہم طرفین کے ناطق اور اصم حصوں کو آپس میں برابر نہیں رکھ سکتے۔

مثال۔ $\text{۷۲} - \text{۳۲}\sqrt{\text{۵}}$ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $\sqrt[\text{۳}]{\text{۷۲} - \text{۳۲}\sqrt{\text{۵}}} = \text{لا} - \sqrt{\text{ما}}$

تب $\sqrt[\text{۳}]{\text{۷۲} + \text{۳۲}\sqrt{\text{۵}}} = \text{لا} + \sqrt{\text{ما}}$

دونوں کو ضرب دینے سے $\sqrt[\text{۳}]{\text{۵۱۸۴} - \text{۵}\times\text{۱۰۲۴}} = \text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}$

یعنی $\text{۴} = \text{لا}^{\text{۲}} - \text{ما}$ ............... (۱)

نیز $\text{۷۲} - \text{۳۲}\sqrt{\text{۵}} = \text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳}\,\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{ما}} + \text{۳}\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{ما}\sqrt{\text{ما}}$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\text{۷۲} = \text{لا}^{\text{۳}} + \text{۳}\,\text{لا}\,\text{ما}$ ............... (۲)

(۱) اور (۲) سے $\text{۷۲} = \text{لا}^{\text{۳}} + \text{۳}\,\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴})$

یعنی $\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳}\,\text{لا} = \text{۱۸}$

جس سے $\text{لا} = \text{۳}$، اس لیے $\text{ما} = \text{۵}$

اور جذر الکعب $= \text{۳} - \sqrt{\text{۵}}$

۸۴۔ جب کبھی کسی جملۂ ثنائی میں جس کا جذر الکعب مطلوب ہو دو مقادیر اصم درجۂ دوم شامل ہوں تو ہمیں اس طرح عمل کرنا چاہیے۔

مثال۔ $\text{۹}\sqrt{\text{۳}} + \text{۱۱}\sqrt{\text{۲}}$ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

$$\sqrt[\text{۳}]{\text{۹}\sqrt{\text{۳}} + \text{۱۱}\sqrt{\text{۲}}} = \sqrt[\text{۳}]{\text{۳}\sqrt{\text{۳}}\left(\text{۳} + \tfrac{\text{۱۱}}{\text{۳}}\sqrt{\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}}\right)} = \sqrt{\text{۳}}\,\sqrt[\text{۳}]{\text{۳} + \tfrac{\text{۱۱}}{\text{۳}}\sqrt{\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}}}$$

دفعہ سابق کے مطابق عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\sqrt[\text{۳}]{\text{۳} + \tfrac{\text{۱۱}}{\text{۳}}\sqrt{\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}}} = \text{۱} + \sqrt{\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}}$$

∴ جذر الکعب مطلوب $= \sqrt{\text{۳}}\left(\text{۱} + \sqrt{\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}}\right) = \sqrt{\text{۳}} + \sqrt{\text{۲}}$

۸۵۔ اب ہم مقادیر اصم کی چند مشکل مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال۔ $\dfrac{\text{۴}}{\sqrt[\text{۳}]{\text{۹}} - \sqrt[\text{۳}]{\text{۳}} + \text{۱}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

$$\text{جملہ} = \frac{4}{3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{4\left(3^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{\left(3^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

$$= \frac{4\left(3^{\frac{1}{3}} + 1\right)}{3 + 1} = 3^{\frac{1}{3}} + 1$$

مثال ۲۔ $\sqrt{\frac{3}{2}(\text{لا} - 1) + \sqrt{2\text{لا}^2 - 7\text{لا} - 4}}$ کا جذر نکالو

$$\text{جملہ} = \frac{1}{2}\left\{3\text{لا} - 3 + 2\sqrt{(2\text{لا}+1)(\text{لا}-4)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2\text{لا}+1) + (\text{لا}-4) + 2\sqrt{(2\text{لا}+1)(\text{لا}-4)}\right\}$$

ظاہر ہے کہ جذر مطلوب $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2\text{لا}+1} + \sqrt{\text{لا}-4}\right)$

مثال ۳۔ معلوم ہے $\sqrt{5} = 2.23607$

$\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{2}$ سے ضرب دیں تو

$$\text{جملہ} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{2 + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2 + 3 - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.44721$$

مثال ۴۔ مساوات $\sqrt{\text{لا}+2} + \sqrt{\text{لا}-14} = 8$ کو حل کرو۔

عمل نقل سے $\sqrt{\text{لا}+2} = 8 - \sqrt{\text{لا}-14}$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\text{لا} + 2 = 64 - 16\sqrt{\text{لا}-14} + \text{لا} - 14$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ

$۱۶\sqrt{لا - ۱۴} = ۴۸$ ، یعنی $\sqrt{لا - ۱۴} = ۳$

اس لیے $لا - ۱۴ = ۹ \therefore لا = ۲۳$

## امثلہ نمبری (۷)

ذیل کی کسروں کے نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

۱- $\dfrac{۱}{۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳}}$ ، ۲- $\dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \sqrt{۵}}$

۳- $\dfrac{۱}{\sqrt{و} + \sqrt{ب} + \sqrt{و + ب}}$ ، ۴- $\dfrac{۲\sqrt{و + ۱}}{\sqrt{و - ۱} - \sqrt{۲و} + \sqrt{و + ۱}}$

۵- $\dfrac{\sqrt{۱۰} + \sqrt{۵} - \sqrt{۳}}{\sqrt{۳} + \sqrt{۱۰} - \sqrt{۵}}$ ، ۶- $\dfrac{(\sqrt{۳} + \sqrt{۵})(\sqrt{۵} + \sqrt{۲})}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \sqrt{۵}}$

ذیل کے جملوں کا منطق جزو ضربی دریافت کرو۔

۷- $\sqrt[۳]{۳} - \sqrt{۲}$ ، ۸- $\sqrt[۶]{۵} + \sqrt[۳]{۲}$

۹- $و^{\frac{۱}{۶}} + ب^{\frac{۱}{۴}}$ ، ۱۰- $\sqrt[۳]{۴} - ۱$

۱۱- $۲ + \sqrt[۴]{۷}$ ، ۱۲- $\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۴]{۳}$

۱۳- $\dfrac{\sqrt[۳]{۳} - ۱}{\sqrt[۳]{۳} + ۱}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

۱۴- $\dfrac{۸^{\frac{۱}{۶}} - ۹^{\frac{۱}{۶}}}{۸^{\frac{۱}{۶}} + ۹^{\frac{۱}{۶}}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

۱۵- $\dfrac{\sqrt{۲}\,\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt{۲} + \sqrt[۳]{۳}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

۱۶۔ $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

۱۷۔ $\frac{\sqrt{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}-\sqrt[3]{4}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

۱۸۔ $\frac{\sqrt[6]{27}}{3-\sqrt[6]{9}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو۔

۱۹۔ $16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}$

۲۰۔ $24+4\sqrt{15}-4\sqrt{21}-2\sqrt{35}$

۲۱۔ $6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}$

۲۲۔ $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$

۲۳۔ $\text{ا}+3\text{ب}+4+4\sqrt{\text{ا}}-4\sqrt{3\text{ب}}-2\sqrt{3\text{اب}}$

۲۴۔ $21+3\sqrt{8}-6\sqrt{3}-9\sqrt{7}-\sqrt{24}-\sqrt{56}+2\sqrt{21}$

جملات ذیل کے جذر المکعب دریافت کرو۔

۲۵۔ $7+5\sqrt{2}$ ، ۲۶۔ $16+8\sqrt{5}$

۲۷۔ $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$ ، ۲۸۔ $99-70\sqrt{2}$

۲۹۔ $135\sqrt{3}-87\sqrt{6}$ ، ۳۰۔ $1+(1+\text{ا}^2)^{-\frac{1}{2}}$ کا جذر نکالو

۳۱۔ $1+\text{ا}^2+(1+\text{ا}^2+\text{ا}^4)^{\frac{1}{2}}$ کا جذر نکالو

۳۲۔ اگر $\text{ا}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ اور $\text{ب}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$
تو $7\text{ا}^2+11\text{اب}-7\text{ب}^2$ کی قیمت دریافت کرو۔

۳۳۔ اگر $\text{لا}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ اور $\text{ما}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
تو $3\text{لا}^2-5\text{لاما}+3\text{ما}^2$ کی قیمت دریافت کرو۔

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۴- $\sqrt{\dfrac{۶+۲\sqrt{۳}}{۳۳-۱۹\sqrt{۳}}}$

۳۵- $(۴۸-۱۰\sqrt{۳})^{-\frac{۱}{۲}}-(۷+۴\sqrt{۳})^{-\frac{۱}{۲}}$

۳۶- اگر $\sqrt{۳}=۱٫۷۳۲۰۵۰۸$ تو $\dfrac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۳۷- اگر $\sqrt{۵}=۲٫۲۳۶۰۷$ تو

$\dfrac{۱۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}-\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}-\dfrac{\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۸}+\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}$ کی قیمت دریافت کرو

۳۸- اگر $۲لا=\sqrt{و}+\dfrac{۱}{\sqrt{و}}$ تو $\dfrac{\sqrt{لا^{۲}-۱}}{لا-\sqrt{لا^{۲}-۱}}$ کی قیمت دریافت کرو

معادلات ذیل کو حل کرو۔

۳۹- $\sqrt{(لا+۱۱)}-\sqrt{لا}=۱$

۴۰- $\sqrt{(۳لا+۴)}+\sqrt{(۳لا-۵)}=۹$

۴۱- $و\sqrt{(ب-لا)}=ب\sqrt{(و-لا)}$

۴۲- $\sqrt{(لا+و)}+\sqrt{(لا+ب)}=\sqrt{ج}$

۴۳- ثابت کرو کہ $\sqrt[۳]{(\sqrt{۵}+۲)}-\sqrt[۳]{(\sqrt{۵}-۲)}=۱$

# باب ہشتم

## مقادیر خیالی

۸۶۔ فرض کرو کہ کسی مقدار منفی ا کا جذر نکالنا مطلوب ہے، اس میں ایک نئی شکل ہے، $-\infty$ سے $+\infty$ تک تمام مقادیر جبریہ کے مربعے مثبت ہوتے ہیں۔ اس لیے ایسی کوئی مقدار فی الحال ہم کو معلوم نہیں جس کا مربع $-$ا کے برابر ہو۔ اب اگر ہم اپنے اعمال جبریہ کی تعمیم کو بدستور قائم رکھنا چاہتے ہیں تو مقادیر جبریہ کے میدان کو وسیع کیے بغیر چارہ نہیں۔ ہم اس جگہ ایک نئی خیالی اکائی یا خیالی مقدار کو اپنی تحقیقات جبریہ میں شامل کرتے ہیں اس خیالی مقدار کو ہم ہمیشہ حرف خ یا $\sqrt{-1}$ سے تعبیر کریں گے اور اس کی تعریف ہوگی۔

$$\text{خ}^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$$

ظاہر ہے کہ خ کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہو سکتی کیونکہ تمام حقیقی مقادیر کے مربعے مثبت ہوتے ہیں خ کے تمام خواص ہم اس کی تعریف سے اخذ کریں گے۔

۸۷۔ بموجب تعریف $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

طرفین کو ا میں ضرب دینے سے $\sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1} = \text{ا}(-1)$

یعنی $(\sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1})^2 = -1$

یا $\sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-\text{ا}}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب $\sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1}$ کو مقدار خیالی $\sqrt{-\text{ا}}$ کے برابر خیال کرنا چاہیے۔

۸۸۔ عام طور پر کسی جملہ کی خیالی خصلت کو ظاہر کرنے کے لیے بہتر ہوگا کہ ہم علامت خیالی $\sqrt{-1}$ کو واضح طور پر علیحدہ کرکے لکھیں۔ مثلاً

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times -1} = 2\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-\text{ے}\,\text{ا}^2} = \sqrt{\text{ے}\,\text{ا}^2 \times (-1)} = \text{ا}\sqrt{\text{ے}} \times \sqrt{-1}$$

۸۹۔ تاوقتیکہ اس کے خلاف کوئی صراحت نہ ہو ہم آئندہ ہر ایک علامت جذر کے پہلے علامت مثبت کو متصرف خیال کریں گے مگر مقادیر خیالی کی بحث میں ایک بات قابلِ غور ہے۔

چونکہ $(-\text{ا}) \times (-\text{ب}) = \text{اب}$

جذر لینے سے $\sqrt{(-\text{ا})} \times \sqrt{(-\text{ب})} = \pm\sqrt{\text{اب}}$

بظاہر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sqrt{-\text{ا}}$ اور $\sqrt{-\text{ب}}$ کا حاصل ضرب دریافت کرنے میں ہم $\sqrt{\text{اب}}$ کے ماقبل کوئی سی علامت مثبت یا منفی لے سکتے ہیں مگر یہ درست نہیں کیونکہ

$$\sqrt{-\text{ا}} \times \sqrt{-\text{ب}} = \sqrt{\text{ا}} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{\text{ب}} \times \sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{\text{اب}}\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -\sqrt{\text{اب}}$$

$$\therefore \sqrt{-\text{ا}} \times \sqrt{-\text{ب}} = -\sqrt{\text{اب}}$$

۹۰۔ اگر کسی حقیقی مقدار ا میں کسی خالص مقدار خیالی $\text{ب}\sqrt{-1}$ کو جمع کر دیا جائے تو جملہ $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ حاصل ہوگا اسے ہم جملہ خیالی کے نام سے موسوم کریں گے۔ یاد رہے کہ تمام خیالی جملے $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کی صورت میں لائے جا سکتے ہیں اس جملے میں ا اور ب دونوں حقیقی مقداریں ہیں۔ مگر یہ ضروری نہیں کہ ناطق بھی ہوں۔

۹۰ ا۔ مقادیر خیالی پر عمل کرتے وقت ہم ان ہی قوانین جبریہ کو

استعمال کرتے ہیں جو مقادیر اصم کے لیے ثابت کیے گئے۔

مثال ۱۔ ا + ب $\sqrt{-1}$ ± (ج + د $\sqrt{-1}$) = ا ± ج + (ب ± د) $\sqrt{-1}$

مثال ۲۔ (ا + ب $\sqrt{-1}$) (ج + د $\sqrt{-1}$)

= اج − ب د + (ب ج + ا د) $\sqrt{-1}$

**۹۱**۔ اگر ا + ب $\sqrt{-1}$ = ۰ تو ا = ۰ اور ب = ۰

کیونکہ اگر ا + ب $\sqrt{-1}$ = ۰

تو ب $\sqrt{-1}$ = − ا

طرفین کا مربع لینے سے − ب$^2$ = ا$^2$

اس لیے ا$^2$ + ب$^2$ = ۰

اب ا$^2$ اور ب$^2$ دونوں مثبت ہیں ان کا حاصل جمع صفر نہیں ہو سکتا جب تک اُن میں سے ہر ایک صفر نہ ہو۔

پس معلوم ہوا کہ ا = ۰ اور ب = ۰

**۹۲**۔ اگر ا + ب $\sqrt{-1}$ = ج + د $\sqrt{-1}$

تو ا = ج اور ب = د

عمل نقل سے ا − ج + (ب − د) $\sqrt{-1}$ = ۰

بموجب دفعہ سابق ا − ج = ۰ یعنی ا = ج

اور ب − د = ۰ یعنی ب = د

پس معلوم ہوا کہ دو خیالی جملوں کے باہم مساوی ہونے کے لیے یہ ضروری اور کافی ہے کہ اُن کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے بھی آپس میں برابر ہوں۔

**۹۳**۔ **تعریف**۔ دو خیالی جملے جو صرف اپنے خیالی حصوں میں مختلف العلامت ہوں ایک دوسرے کے **مزدوج** کہلاتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا **زوج** کہتے ہیں۔

مثلاً ۳ − ۲ $\sqrt{-1}$ اور ۳ + ۲ $\sqrt{-1}$ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

ایسے ہی − ۴ $\sqrt{-1}$ اور + ۴ $\sqrt{-1}$ اور بالعموم ا + ب $\sqrt{-1}$ اور

$ا - ب\sqrt{-۱}$ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

**۹۴**۔ دو مزدوج خیالی جملوں کے حاصل جمع اور حاصلِ ضرب مقادیر حقیقی ہوتے ہیں۔

کیونکہ $ا + ب\sqrt{-۱} + ا - ب\sqrt{-۱} = ۲ا$

اور $(ا + ب\sqrt{-۱})(ا - ب\sqrt{-۱}) = ا^۲ - (-ب^۲) = ا^۲ + ب^۲$

**۹۵**۔ **تعریف**۔ $ا^۲ + ب^۲$ کے جذر کی مثبت قیمت کو ہر دو مزدوج خیالی جملوں $ا + ب\sqrt{-۱}$ اور $ا - ب\sqrt{-۱}$ کا مقیاس کہتے ہیں ہم $ا + ب\sqrt{-۱}$ کے مقیاس کو مق $(ا + ب\sqrt{-۱})$ سے تعبیر کرینگے۔

∴ بموجب تعریف مق $(ا + ب\sqrt{-۱}) = +\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$

**مثال ۱**۔ مق $(-۳ + ۴\sqrt{-۱}) = +\sqrt{(-۳)^۲ + (۴)^۲} = ۵$

**مثال ۲**۔ مق $(-۳ - ۴\sqrt{-۱}) = +\sqrt{(-۳)^۲ + (-۴)^۲} = ۵$

**مثال ۳**۔ مق $(۱ + \sqrt{-۱}) = +\sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$

**۹۶**۔ دو خیالی جملوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن جملوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ $ا + ب\sqrt{-۱}$ اور $ج + د\sqrt{-۱}$ دو جملے ہیں۔

ان کا حاصل ضرب $= اج - ب د + (اد + ب ج)\sqrt{-۱}$ ایک خیالی جملہ ہے۔

اور اس کا مقیاس $= \sqrt{(اج - ب د)^۲ + (اد + ب ج)^۲}$

$= \sqrt{ا^۲ج^۲ + ب^۲د^۲ + ا^۲د^۲ + ب^۲ج^۲}$

$= \sqrt{(ا^۲ + ب^۲)(ج^۲ + د^۲)}$

$= \sqrt{ا^۲ + ب^۲} \times \sqrt{ج^۲ + د^۲}$ جس سے مسئلہ ثابت ہوا۔

**۹۷**۔ اگر کوئی عدد خیالی معدوم ہو جائے تو اس کا مقیاس بھی

معدوم ہو جائے گا اور برعکس اس کے اگر کسی عدد خیالی کا مقیاس معدوم ہو جائے تو وہ عدد بھی معدوم ہو جائے گا۔

∴ اگر $ا + ب\sqrt{-۱} = ۰$ تو $ا = ۰$ اور $ب = ۰$

اس لیے $\sqrt{ا^۲ + ب^۲} = ۰$

نیز اگر $\sqrt{ا^۲ + ب^۲} = ۰$ تو $ا^۲ + ب^۲ = ۰$

$ا^۲$ اور $ب^۲$ ہر دو مثبت مقادیر ہیں۔ ان کا مجموعہ اُسی صورت میں صفر ہو سکتا ہے جبکہ اُن میں سے ہر ایک مقدار صفر ہو۔ یعنی $ا = ب = ۰$

اگر دو اعداد خیالی برابر ہوں تو اُن کے مقیاس برابر ہونگے مگر اس کا عکس صحیح نہیں۔

دیکھو ∴ اگر $ا_۱ + ب_۱\sqrt{-۱} = ا_۲ + ب_۲\sqrt{-۱}$

تو $ا_۱ = ا_۲$ اور $ب_۱ = ب_۲$

∴ $\sqrt{ا_۱^۲ + ب_۱^۲} = \sqrt{ا_۲^۲ + ب_۲^۲}$

برعکس اس کے اگر $\sqrt{ا_۱^۲ + ب_۱^۲} = \sqrt{ا_۲^۲ + ب_۲^۲}$

تو یہ ضروری نہیں کہ $ا_۱ = ا_۲$ اور $ب_۱ = ب_۲$

**مثال**۔ $(۲+۳\sqrt{-۱})(۳-۲\sqrt{-۱})(۴-۶\sqrt{-۱})$ کا مقیاس دریافت کرو۔

$مق\{(۲+۳\sqrt{-۱})(۳-۲\sqrt{-۱})(۴-۶\sqrt{-۱})\}$

$= مق(۲+۳\sqrt{-۱}) \times مق(۳-۲\sqrt{-۱}) \times مق(۴-۶\sqrt{-۱})$

$= \sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳} \times \sqrt{۵۲} = ۲۶\sqrt{۱۳}$

**۹۸**۔ اگر کسی کسر کا نسب نما $ا + ب\sqrt{-۱}$ کی شکل کا خیالی جملہ ہو تو کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو مزدوج جملہ $ا - ب\sqrt{-۱}$ سے ضرب دینے سے نسب نما حقیقی بن جاتا ہے۔

مثلاً
$$\frac{\text{ج} + \text{د}\sqrt{-1}}{\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}} = \frac{(\text{ج} + \text{د}\sqrt{-1})(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1})}{(\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1})(\text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\text{اج} + \text{ب د} + (\text{ا د} - \text{ب ج})\sqrt{-1}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{اج} + \text{ب د}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \frac{\text{ا د} - \text{ب ج}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\sqrt{-1}$$

پس مندرجۂ بالا نتیجہ اور دفعہ ۹۰ کی مدد سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو خیالی جملوں کا حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب اور خارج قسمت میں سے ہر ایک، ایک خیالی جملہ ہے۔

**۹۹- $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کا جذر نکالو۔**

فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}} = \text{لا} + \text{ما}\sqrt{-1}$ جہاں لا اور ما دونوں مقادیر حقیقی ہیں۔

طرفین کا مربع لینے سے $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1} = \text{لا}^2 - \text{ما}^2 + 2\,\text{لا ما}\sqrt{-1}$

$$\therefore \text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{اور}\ 2\,\text{لا ما} = \text{ب} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 = (\text{لا}^2 - \text{ما}^2)^2 + (2\,\text{لا ما})^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = +\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

علامتِ جذر کے ماقبل ہم نے مثبت علامت اس لیے لکھی ہے کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ ایک مثبت مقدار ہے کیونکہ لا اور ما دونوں حقیقی مقداریں ہیں۔

(۱) اور (۳) سے معلوم ہوا کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \text{ا}}{2} ، \quad \text{ما}^2 = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} - \text{ا}}{2}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\left\{\frac{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \text{ا}}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \ \text{اور}\ \text{ما} = \pm\left\{\frac{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} - \text{ا}}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب لا ما کی وہی علامت ہوگی جو ب کی ہے۔

## مثال ۱۔ √(-۷-۲۴√-۱) کا جذر نکالو۔

فرض کرو کہ √(-۷-۲۴√-۱) = لا + ما√-۱

تب -۷-۲۴√-۱ = لا² - ما² + ۲ لا ما√-۱

∴ لا² - ما² = -۷ ........................ (۱)

اور ۲ لا ما = -۲۴

اب (لا² + ما²)² = (لا² - ما²)² + (۲ لا ما)² = ۴۹ + ۵۷۶ = ۶۲۵

∴ لا² + ما² = ۲۵ ........................ (۲)

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ لا² = ۹ اور ما² = ۱۶

∴ لا = ±۳ اور ما = ±۴

چونکہ حاصل ضرب لا ما منفی ہے اس لیے لا = ۳ اور ما = -۴ یا لا = -۳ اور ما = ۴

پس مطلوبہ جذر ہے ۳-۴√-۱ یا -۳+۴√-۱

یعنی √(-۷-۲۴√-۱) = ±(۳-۴√-۱)

## مثال ۲۔ ⁴√(-۶۴ی⁴) کی قیمت دریافت کرو۔

⁴√(-۶۴ی⁴) = √(±۸ی²√-۱) = ۲ی√۲ √(±√-۱)

اب ہمیں √(±√-۱) کی قیمت دریافت کرنی ہے۔

فرض کرو کہ √(+√-۱) = لا + ما√-۱

تب √-۱ = لا² - ما² + ۲ لا ما√-۱

∴ لا² - ما² = ۰ اور ۲ لا ما = ۱

جس سے معلوم ہوا کہ $\text{لا} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $\text{ما} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ یا $\text{لا} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $\text{ما} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{-1}\right)$$

اسی طرح سے $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{-1}\right)$

$$\therefore \sqrt{\pm\sqrt{-1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\pm\sqrt{-1}\right)$$

اور $\sqrt[4]{-64\,\text{لا}^4} = \pm 2\,\text{لا}\left(1\pm\sqrt{-1}\right)$

## ۱۰۰ − $\sqrt{-1}$ یا خ کی قوتیں

$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$ یا $\text{خ} = \text{خ}$

$(\sqrt{-1})^2 = -1$ یا $\text{خ}^2 = -1$

$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$ یا $\text{خ}^3 = -\text{خ}$

$(\sqrt{-1})^4 = +1$ یا $\text{خ}^4 = +1$

چونکہ $\sqrt{-1}$ کی ہر ایک قوت اپنی قوت ماقبل کو $\sqrt{-1}$ کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس لیے ظاہر ہے کہ دور مندرجۂ بالا کے بعد $\sqrt{-1}$ کی خواہ کوئی قوت لی جائے وہی نتائج تکرار پائینگے جو اوپر مندرج ہیں مثلاً

$$(\sqrt{-1})^{45} = \left\{(\sqrt{-1})^4\right\}^{11} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{51} = \left\{(\sqrt{-1})^4\right\}^{12} (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{66} = \left\{(\sqrt{-1})^4\right\}^{16} (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$(\sqrt{-1})^{72} = \left\{(\sqrt{-1})^4\right\}^{18} = 1$$

۱۰۱ − اب ہم مقادیر خیالی کے چند کارآمد خواص دریافت کرینگے۔

فرض کرو کہ $\text{لا} = \sqrt[۳]{۱}$ تب $\text{لا}^{۳} = ۱$ یا $\text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$

یعنی $(\text{لا} - ۱)(\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱) = ۰$

اس لیے $\text{لا} - ۱ = ۰$ یا $\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$

جس سے $\text{لا} = ۱$ یا $\text{لا} = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

اگر ہم لا کی مندرجۂ بالا قیمتوں میں سے کسی ایک کی تیسری قوت لیں تو ہر ایک صورت میں عدد ایک حاصل ہوگا پس معلوم ہوا کہ اکائی کے جذر الکعب کی تین قیمتیں ۱، $\frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$، $\frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$ ہیں اور ان میں سے دو خیالی ہیں اور ایک حقیقی۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ جذر الکعب کی خیالی قیمتوں میں سے ہر ایک دوسری قیمت کے مربع کے برابر ہے۔

$$\left(\frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱ - ۳ - ۲\sqrt{-۳}}{۴} = \frac{-۲ - ۲\sqrt{-۳}}{۴}$$

$$= \frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$$

اسی طرح سے $\left(\frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱ - ۳ + ۲\sqrt{-۳}}{۴} = \frac{-۲ + ۲\sqrt{-۳}}{۴}$

$$= \frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$$

۱۰۲- چونکہ اکائی کے خیالی جذر الکعبوں میں سے ہر ایک دوسرے کا مربع ہے، اس لیے انھیں عموماً سہ اور سہ$^{۲}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے لہٰذا اکائی کے تین جذر الکعب ہیں۔

۱، سہ اور سہ$^{۲}$۔

چونکہ مساوات $\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰$ کی ایک اصل سہ ہے، اس لیے $\text{سہ}^{۲} + \text{سہ} + ۱ = ۰$ یعنی اکائی کے تین جذر الکعبوں کا حاصل جمع صفر ہے۔

نیز چونکہ $\text{سہ} \times \text{سہ}^{۲} = \text{سہ}^{۳} = ۱$

اس لیے اکائی کے دو خیالی جذر الکعبوں کا حاصل ضرب ایک ہے اور $\text{سہ}^{۳}$ کی ہر صحیح قوت بھی ایک کے برابر ہے۔

**۱۰۳-** یاد رہے کہ سہ کی تمام مثبت صحیح قوتیں علی التواتر ۱، سہ، $\text{سہ}^{۲}$ ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی صحیح مثبت عدد ہے اگر یہ تین کا ضعف ہو تو لازماً اس کی صورت ۳م ہوگی اور $\text{سہ}^{\text{ن}} = \text{سہ}^{۳\text{م}} = ۱$

اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو اس کی صورت ۳م + ۱ یا ۳م + ۲ ہوگی۔

اگر ن = ۳م + ۱ تو $\text{سہ}^{\text{ن}} = \text{سہ}^{۳\text{م}+۱} = \text{سہ}^{۳\text{م}} \times \text{سہ} = \text{سہ}$

اگر ن = ۳م + ۲ تو $\text{سہ}^{\text{ن}} = \text{سہ}^{۳\text{م}+۲} = \text{سہ}^{۳\text{م}} \times \text{سہ}^{۲} = \text{سہ}^{۲}$

**۱۰۴-** اب ہمیں معلوم ہو گیا کہ ہر ایک مقدار حقیقی کے تین جذر الکعب ہوتے ہیں جن میں دو خیالی ہیں، کیونکہ $\sqrt[۳]{\text{ق}}$ کا جذر الکعب وہی ہے جو حاصل ضرب $۱ \times \sqrt[۳]{\text{ق}}$ کا اس لیے جذر کی تین قیمتیں $\sqrt[۳]{\text{ق}}$، $\sqrt[۳]{\text{ق}}\,\text{سہ}$، $\sqrt[۳]{\text{ق}}\,\text{سہ}^{۲}$ ہیں۔

اسی طرح سے ۹ کے جذر الکعب کی قیمتیں $\sqrt[۳]{۹}$، $\sqrt[۳]{۹} \times \text{سہ}$، $\sqrt[۳]{۹} \times \text{سہ}^{۲}$ ہیں جہاں $\sqrt[۳]{۹}$ وہ جذر الکعب ہے جو معمولی حسابی طریقہ سے نکالا گیا ہے۔

**مثال ۱-** $\frac{(۲ + ۳\sqrt{-۱})^{۲}}{۲ + \sqrt{-۱}}$ کو $\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-۱}$ کی صورت میں لاؤ۔

$$\text{دیا ہوا جملہ} = \frac{۴ - ۹ + ۱۲\sqrt{-۱}}{۲ + \sqrt{-۱}}$$

$$= \frac{(-۵ + ۱۲\sqrt{-۱})(۲ - \sqrt{-۱})}{(۲ + \sqrt{-۱})(۲ - \sqrt{-۱})}$$

$$= \frac{-10+12+29\sqrt{-1}}{4+1}$$

$= \frac{2}{5} + \frac{29}{5}\sqrt{-1}$ اور یہ صورت مطلوبہ ہے۔

**مثال ۲۔** ثابت کرو کہ $\frac{4-5\sqrt{-1}}{2+3\sqrt{-1}} \times \frac{3+2\sqrt{-1}}{7+\sqrt{-1}} = \frac{81-583\sqrt{-1}}{650}$

بائیں جانب کا جملہ $= \frac{12-10(\sqrt{-1})^2-7\sqrt{-1}}{14+3(\sqrt{-1})^2+23\sqrt{-1}} = \frac{22-7\sqrt{-1}}{11+23\sqrt{-1}}$

$$= \frac{(22-7\sqrt{-1})(11-23\sqrt{-1})}{(11+23\sqrt{-1})(11-23\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{242+161(\sqrt{-1})^2-583\sqrt{-1}}{121-529(\sqrt{-1})^2}$$

$$= \frac{242-161-583\sqrt{-1}}{121+529} = \frac{81-583\sqrt{-1}}{650}$$

**مثال ۳۔** $\text{لا}^3+\text{ما}^3$ کے تین اجزائے ضربی درجۂ اول کے دریافت کرو

چونکہ $\text{لا}^3+\text{ما}^3 = (\text{لا}+\text{ما})(\text{لا}^2-\text{لا ما}+\text{ما}^2)$

$\therefore \text{لا}^3+\text{ما}^3 = (\text{لا}+\text{ما})(\text{لا}+\text{سہ ما})(\text{لا}+\text{سہ}^2\text{ ما})$

کیونکہ $\text{سہ}+\text{سہ}^2 = -1$ اور $\text{سہ}^3 = 1$

**مثال ۴۔** ثابت کرو کہ $(\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^2\text{ ج})(\text{ا}+\text{سہ}^2\text{ ب}+\text{سہ ج})$

$= \text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ب ج}-\text{ج ا}-\text{ا ب}$

$\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^2\text{ ج}$ اور $\text{ا}+\text{سہ}^2\text{ ب}+\text{سہ ج}$ کے حاصل ضرب میں

$\text{ب}^2$ یا $\text{ج}^2$ کا سر $= \text{سہ}^3 = 1$

ب ج کا سر $= \text{سہ}^2+\text{سہ}^4 = \text{سہ}^2+\text{سہ} = -1$

ج ا یا ا ب کا سر $= \text{سہ}^2+\text{سہ} = -1$

$\therefore (\text{ا}+\text{سہ ب}+\text{سہ}^2\text{ ج})(\text{ا}+\text{سہ}^2\text{ ب}+\text{سہ ج})$

$= \text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ب ج}-\text{ج ا}-\text{ا ب}$

مثال ۵- ثابت کرو کہ $(۱+سہ-سہ^۲)^۳-(۱-سہ+سہ^۲)^۳=۰$

چونکہ $۱+سہ+سہ^۲=۰$

$$\therefore (۱+سہ-سہ^۲)^۳-(۱-سہ+سہ^۲)^۳=(-۲سہ^۲)^۳-(-۲سہ)^۳$$

$$=-۸سہ^۶+۸سہ^۳=-۸+۸=۰$$

# امثلہ نمبری ۸

۱- $۳\sqrt{-۷}-۵\sqrt{-۲}$ کو $۳\sqrt{-۷}+۵\sqrt{-۲}$ سے ضرب دو

۲- $۲\sqrt{-۳}+۳\sqrt{-۲}$ کو $۴\sqrt{-۳}-۵\sqrt{-۲}$ سے ضرب دو

۳- $لا-\frac{۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ کو $لا-\frac{۱-\sqrt{-۳}}{۲}$ سے ضرب دو

ذیل کے جملوں کے نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

۴- $\frac{۳\sqrt{-۲}+۲\sqrt{-۵}}{۳\sqrt{-۲}-۲\sqrt{-۵}}$

۵- $\frac{ا+لا\sqrt{-۱}}{ا-لا\sqrt{-۱}}-\frac{ا-لا\sqrt{-۱}}{ا+لا\sqrt{-۱}}$

۶- $\frac{(ا+\sqrt{-۱})^۳-(ا-\sqrt{-۱})^۳}{(ا+\sqrt{-۱})^۲-(ا-\sqrt{-۱})^۲}$

۷- $(-\sqrt{-۱})^{۴ن+۳}$ کی قیمت دریافت کرو، اس میں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو۔

۸- $-۱۱-۶۰\sqrt{-۱}$ ۹- $-۸\sqrt{-۱}$

۱۰- $ا^۲-۱+۲ا\sqrt{-۱}$ ۱۱- $۴اب-۲(ا^۲-ب^۲)\sqrt{-۱}$

ذیل کے جملوں کو ا+خ ب کی صورت میں لاؤ۔

۱۲- $\frac{\sqrt{-۳}-خ\sqrt{۲}}{۲\sqrt{-۳}-خ\sqrt{۲}}$ ۱۳- $\frac{۱+خ}{۱-خ}$

۱۴- $\frac{(\text{ا}+\text{خ ب})^{۲}}{\text{ا}-\text{خ ب}}-\frac{(\text{ا}-\text{خ ب})^{۲}}{\text{ا}+\text{خ ب}}$

۱۵- $\frac{(۱+\text{خ})^{۲}}{۳-\text{خ}}$

۱۶- $\frac{۱+\sqrt{-۱}}{۱+۲\sqrt{-۱}}+\frac{۱-\sqrt{-۱}}{۱-۲\sqrt{-۱}}$

۱۷- $\frac{۲+۳\sqrt{-۱}}{۶+۸\sqrt{-۱}}+\frac{۷-۲۶\sqrt{-۱}}{۳-۴\sqrt{-۱}}$

۱۸- ثابت کرو کہ $\left(\frac{-۱+\text{خ}\sqrt{۳}}{۲}\right)^{\text{ن}}+\left(\frac{-۱-\text{خ}\sqrt{۳}}{۲}\right)^{\text{ن}}=-۱$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے مگر ۳ کا ضعف نہیں ہے۔

۱۹- $(\text{لا}-۱-\text{خ}\sqrt{۲})(\text{لا}-۱+\text{خ}\sqrt{۲})(\text{لا}-۲+\text{خ}\sqrt{۳})(\text{لا}-۲-\text{خ}\sqrt{۳})$

کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ اور ترتیب دو۔

۲۰- ثابت کرو کہ $\left\{(۲\text{ا}-\text{ب}-\text{ج})+\text{خ}(\text{ب}-\text{ج})\sqrt{۳}\right\}^{۳}$

$=\left\{(۲\text{ب}-\text{ج}-\text{ا})+\text{خ}(\text{ج}-\text{ا})\sqrt{۳}\right\}^{۳}$

۲۱- ثابت کرو کہ $\left\{(\sqrt{۳}+۱)+\text{خ}(\sqrt{۳}-۱)\right\}^{۳}=۱۶(۱+\text{خ})$

۲۲- $\frac{(۲-۳\text{خ})(۳+۴\text{خ})}{(۶+۴\text{خ})(۱۵-۸\text{خ})}$ کا مقیاس دریافت کرو۔

اگر ۱، سہ، سہ$^{۲}$ اکائی کے تین جذر الکعب ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۳- $(۱-\text{سہ}+\text{سہ}^{۲})(۱+\text{سہ}-\text{سہ}^{۲})=۴$

۲۴- $(۱+\text{سہ}^{۲})^{۴}=\text{سہ}$

۲۵- $(۱-\text{سہ})(۱-\text{سہ}^{۲})(۱-\text{سہ}^{۴})(۱-\text{سہ}^{۵})=۹$

۲۶- $(۲+۵\text{سہ}+۲\text{سہ}^{۲})^{۶}=(۲+۲\text{سہ}+۵\text{سہ}^{۲})^{۶}=۷۲۹$

۲۷- $(۱-\text{سہ}+\text{سہ}^{۲})(۱-\text{سہ}^{۲}+\text{سہ}^{۴})(۱-\text{سہ}^{۴}+\text{سہ}^{۸})\ldots\ldots$

۲ ن اجزائے ضربی تک = ۲$^{۲ن}$

۲۸- لا$^{۳}$ - ما$^{۳}$ = (لا - ما)(سہ لا - سہ$^{۲}$ ما)(سہ$^{۲}$ لا - سہ ما)

۲۹- (لا + ما)$^{۲}$ + (سہ لا + سہ$^{۲}$ ما)$^{۲}$ + (سہ$^{۲}$ لا + سہ ما)$^{۲}$ = ۶ لا ما

۳۰- (ثابت کرو کہ لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ - ۳ لا ما ی
= (لا + ما + ی)(لا + سہ ما + سہ$^{۲}$ ی)(لا + سہ$^{۲}$ ما + سہ ی)

۳۱- اگر لا = ا + ب، ما = سہ ا + سہ$^{۲}$ ب، ی = سہ$^{۲}$ ا + سہ ب
تو ثابت کرو کہ

(۱) لا ما ی = ا$^{۳}$ + ب$^{۳}$

(۲) لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ۶ ا ب

(۳) لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ = ۳ (ا$^{۳}$ + ب$^{۳}$)

۳۲- اگر ا لا + ج ما + ب ی = ﻻ، ج لا + ب ما + ا ی = ما،
اور ب لا + ا ما + ج ی = ے
تو ثابت کرو کہ

(ا$^{۲}$ + ب$^{۲}$ + ج$^{۲}$ - ب ج - ج ا - ا ب)(لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ - ما ی - ی لا - لا ما)
= ﻻ$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ے$^{۲}$ - ما ے - ﻻ ے - ﻻ ما

۳۳- اگر ﻻ = ا لا + ج ما + ب ی، ما = ج لا + ب ما + ا ی،
ے = ب لا + ا ما + ج ی
تو ثابت کرو کہ ﻻ$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ے$^{۳}$ - ۳ ﻻ ما ے
= (ا$^{۳}$ + ب$^{۳}$ + ج$^{۳}$ - ۳ ا ب ج)(لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ - ۳ لا ما ی)

# باب نہم

## مسائل مساوات درجۂ دوم

**۱۰۵**۔ مساوات درجۂ دوم وہ مساوات ہے جس میں تحویل اور اختصار کے بعد مقدار مجہول کی سب سے اعلیٰ قوت **دو** ہو، مساوات درجۂ دوم کی صورتِ عامہ یہ ہے۔

$$ا\,لا^{2} + ب\,لا + ج = ۰$$

اِس میں مقادیر ا، ب، ج معلوم ہیں اور ان کی رقوم میں مقدار مجہول لا کی قیمت یا قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں، عددی سر ب اور ج میں سے ایک یا دونوں صفر کے برابر ہو سکتے ہیں مگر بالعموم مساوات کا درجہ کم کیے بغیر ہم ا کو صفر کے برابر نہیں فرض کر سکتے۔

**۱۰۶**۔ مساوات درجۂ دوم کی دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات $ا\,لا^{2} + ب\,لا + ج = ۰$ کی تین اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں اب چونکہ ان میں سے ہر ایک اصل دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے، اس لیے

$$ا\,عہ^{2} + ب\,عہ + ج = ۰ \quad ......... (۱)$$

$$ا\,بہ^{2} + ب\,بہ + ج = ۰ \quad ......... (۲)$$

$$ا\,جہ^{2} + ب\,جہ + ج = ۰ \quad ......... (۳)$$

مساوات (۲) کو (۱) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا۔

ا (عہ^۲ - بہ^۲) + ب (عہ - بہ) = ۰

اب چونکہ عہ - بہ صفر کے برابر نہیں ہے کیونکہ مساوات کی اصلیں سب مختلف فرض کی گئی ہیں اس لیے ہر ایک رقم کو عہ - بہ پر تقسیم کرنے سے

ا (عہ + بہ) + ب = ۰ ............ (۴)

اسی طرح مساوات (۲) اور (۳) سے حاصل ہوگا۔

ا (بہ + جہ) + ب = ۰ ............ (۵)

عمل تفریق سے ا (عہ - جہ) = ۰ ............ (۶)

اور یہ ناممکن ہے کیونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اور جیسا ہم نے ابتداء میں فرض کیا عہ اور جہ غیر مساوی ہیں پس ثابت ہوا کہ مساوات درجۂ دوم کی تین مختلف اصلیں نہیں ہوسکتیں۔

۱۰۷- بیشتر اس کے کہ ہم مساوات درجۂ دوم کی صورتِ عامہ کا جبریہ حل دریافت کریں ہم اس کی مفصلۂ ذیل خاص صورتوں پر غور کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ ج = ۰ تو مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی مختصر صورت ہوگی۔

ا لا^۲ + ب لا = ۰

یا لا (لا + ب/ا) = ۰

اب چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے لا = ۰ یا لا = - ب/ا

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں صفر اور - ب/ا ہیں

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور ج = ۰

مساوات کی صورتِ عامہ اور بھی مختصر ہوگئی یعنی ا لا × لا = ۰

اب چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے { لا = ۰ ، لا = ۰ }

اس لیے مساوات کی اصلیں ہوئیں لا = ۰ اور لا = ۰

اس صورت میں اصلیں برابر ہیں اور ہم کہ سکتے ہیں کہ مساوات کی صرف ایک ہی اصل ہے۔ مگر اپنے نتائج کی صداقت عامہ کو قائم رکھنے کے لیے یہ کہنا زیادہ مناسب ہوگا کہ مساوات کی دو مساوی اصلیں ہیں۔

(۳) فرض کرو کہ ب = ۰

تب ا لا$^2$ + ج = ۰

یعنی ا (لا + $\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$) (لا − $\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$) = ۰

چونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے لا = − $\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$ اور لا = + $\sqrt{-\frac{ج}{ا}}$ مطلوبہ اصلیں ہیں اس جگہ اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں اگر $\frac{ج}{ا}$ منفی مقدار ہو تو دونوں اصلیں حقیقی ہونگی اگر $\frac{ج}{ا}$ مثبت مقدار ہو تو دونوں اصلیں خیالی ہونگی اور اس حالت میں ہم انہیں اس طرح بھی لکھ سکینگے۔

لا = − خ $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ اور لا = + خ $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$

۱۰۸۔ مساوات درجۂ دوم کی صورتِ عامہ کا حل اُس حالت میں جبکہ ا صفر کے برابر نہ ہو مختلف طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے لیکن ہم اس جگہ "تکمیل مربع" کے طریقہ کو اختیار کرینگے۔

ا لا$^2$ + ب لا + ج = ۰

ارقام مساوات کو ا پر تقسیم کرنے سے

لا$^2$ + $\frac{ب}{ا}$ لا + $\frac{ج}{ا}$ = ۰

عملِ نقل سے $لا^2 + \frac{ب}{و} لا = - \frac{ج}{و}$

طرفین میں $\left(\frac{ب}{۲و}\right)^2$ جمع کرنے سے

$$لا^2 + \frac{ب}{و} لا + \left(\frac{ب}{۲و}\right)^2 = - \frac{ج}{و} + \left(\frac{ب}{۲و}\right)^2$$

دائیں طرف کا جملہ مربع کامل ہے یعنی $\left(لا + \frac{ب}{۲و}\right)^2$ کے برابر ہے

اس لیے $\left(لا + \frac{ب}{۲و}\right)^2 = \frac{ب^2 - ۴وج}{۴و^2}$

طرفین کا جذر لینے سے، $لا + \frac{ب}{۲و} = \pm \sqrt{\frac{ب^2 - ۴وج}{۴و^2}}$

$$\therefore لا = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴وج}}{۲و}$$

**۱۰۹**۔ اگر مساوات کی مذکورۂ بالا اصلیں عہ اور بہ سے تعبیر کی جائیں تو

$$عہ = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ۴وج}}{۲و} \quad \text{اور} \quad بہ = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ۴وج}}{۲و}$$

ظاہر ہے کہ

(۱) اگر $ب^2 - ۴وج$ (مقدار جو علامت جذر کے اندر ہے) مثبت ہو تو عہ اور بہ حقیقی اور غیر مساوی ہونگی۔

(۲) اگر $ب^2 - ۴وج = ۰$ تو عہ اور بہ حقیقی اور مساوی ہونگی۔

(۳) اگر $ب^2 - ۴وج$ منفی ہو تو عہ اور بہ خیالی اور غیر مساوی ہونگی۔

(۴) اگر $ب^2 - ۴وج$ مربع کامل ہو تو عہ اور بہ ناطق اور غیر مساوی ہونگی صرف اِن نتائج کی استعانت سے ہم مساوات کو

حل کیے بغیر اُس کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرسکتے ہیں۔

نوٹ:۔ چونکہ ہم ب۲ - ۴ ا ج کی قیمت کی مدد سے مساوات کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرسکتے ہیں اس لیے ب۲ - ۴ ا ج کو مساوات کا ممیز کہتے ہیں۔

**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ لا کی کوئی حقیقی قیمت مساوات

۲ لا۲ - ۶ لا + ۷ = ۰ کو پورا نہیں کرسکتی۔

یہاں ا = ۲، ب = -۶، ج = ۷

∴ ب۲ - ۴ ا ج = (-۶)۲ - ۴ × ۲ × ۷ = -۲۰

پس معلوم ہوا کہ مساوات کی اصلیں خیالی ہیں۔

**مثال ۲۔** اگر مساوات لا۲ + ۲ (ک + ۲) لا + ۹ ک = ۰ کی اصلیں مساوی ہوں تو ک کی قیمت دریافت کرو۔

اصلوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے کہ (ک + ۲)۲ = ۹ ک

یعنی ک۲ - ۵ ک + ۴ = ۰

یا (ک - ۴) (ک - ۱) = ۰ ∴ ک = ۴ یا ک = ۱

**مثال ۳۔** ثابت کرو کہ مساوات

لا۲ - ۲ ف لا + ف۲ - ق۲ + ۲ ق ر - ر۲ = ۰ کی اصلیں ناطق ہیں۔

اصلیں ناطق ہونگی اگر ممیز یعنی (-۲ ف)۲ - ۴ (ف۲ - ق۲ + ۲ ق ر - ر۲) مربع کامل ہو۔ ممیز = ۴ (ق۲ - ۲ ق ر + ر۲) = ۴ (ق - ر)۲

پس معلوم ہوا کہ اصلیں ناطق ہیں۔

۱۱۰۔ چونکہ ‌   عہ = (- ب + √(ب۲ - ۴ ا ج)) / ۲ ا

اور   بہ = (- ب - √(ب۲ - ۴ ا ج)) / ۲ ا

جمع کرنے سے

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}} - \text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}}{۲\,\text{ا}}$$

$$= -\frac{۲\,\text{ب}}{۲\,\text{ا}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ضرب دینے سے

$$\text{عہ} \times \text{بہ} = \frac{\left(-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}\right)\left(-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}\right)}{۴\,\text{ا}^2}$$

$$= \frac{(-\text{ب})^2 - (\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج})}{۴\,\text{ا}^2} = \frac{۴\,\text{اج}}{۴\,\text{ا}^2} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر مساوات کو صورت $\text{لا}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = ۰$ میں لکھا جائے تو ان نتائج کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں اگر کسی مساوات درجۂ دوم میں درجۂ دوم کی رقم کا سر ایک ہو تو

(۱) اُس کی اصلوں کا مجموعہ لا کے سر کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۲) اس کی اصلوں کا حاصل ضرب برابر ہوگا رقم مطلق کے۔

**نوٹ**۔ مساوات کی اُس رقم کو جس میں مقدار مجہول شامل نہ ہو رقم مطلق کہتے ہیں۔

**۱۱۱**- چونکہ $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \text{عہ} + \text{بہ}$ اور $\frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \text{عہ بہ}$

مساوات $\text{لا}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} = ۰$ صورت ذیل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}^2 - (\text{عہ} + \text{بہ})\,\text{لا} + \text{عہ بہ} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

معلوم ہوا کہ ہر ایک مساوات درجۂ دوم اس صورت میں بھی لکھی جا سکتی ہے

$$\text{لا}^2 - (\text{اصلوں کا مجموعہ})\,\text{لا} + \text{اصلوں کا حاصل ضرب} = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز (۱) سے (لا - ع) (لا - ب) = ۰ ............... (۳)
اگر کسی مساوات کی صرف اصلیں دی ہوئی ہوں تو اب ہم اُس مساوات کو دریافت کر سکتے ہیں۔

**مثال ۱۔** ایک مساوات کی اصلیں ۳ اور - ۲ ہیں اس کو دریافت کرو۔
مساوات مطلوبہ ہے (لا - ۳) (لا + ۲) = ۰
یا لاٗ - لا - ٦ = ۰

جب اصلیں اصم یا غیر منطق ہوں تو طریقِ ذیل کو اختیار کرنے میں زیادہ سہولت ہوگی۔

**مثال ۲۔** ایک مساوات کی اصلیں ۲ + √۳ اور ۲ - √۳ ہیں تو اس کو دریافت کرو۔
اصلوں کا حاصل جمع = ۴ اور اصلوں کا حاصل ضرب = ۱
∴ قاعدہ (۲) کی استعانت سے مساوات ہوگی لاٗ - ۴ لا + ۱ = ۰

**۱۱۲۔** دفعۂ سابق کی مثال (۱) کے حل کے طریقہ کے مماثل طریقہ کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات مرتب کر سکتے ہیں جس کی تین یا زیادہ اصلیں دی ہوئی ہوں۔

**مثال ۱۔** ایک مساوات کی اصلیں ۲، - ۳، $\frac{۷}{۵}$ ہیں تو اُسے دریافت کرو۔
معادلات ذیل میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔
لا - ۲ = ۰، لا + ۳ = ۰، لا - $\frac{۷}{۵}$ = ۰
اس لیے مساوات مطلوبہ ہوگی (لا - ۲) (لا + ۳) (لا - $\frac{۷}{۵}$) = ۰
یعنی (لا - ۲) (لا + ۳) (۵ لا - ۷) = ۰
یا ۵ لاٗ۳ - ۲ لاٗ - ۳۷ لا + ۴۲ = ۰

**مثال ۲۔** ایسی مساوات مرتب کرو جس کی اصلیں ؟ ± ا، $\frac{ب}{ج}$ ہوں

لا = ۰، لا = ا، لا = - ا، لا = $\frac{ج}{ب}$ میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

اس لیے مساوات ہوئی $لا (لا + ا) (لا - ا) (لا - \frac{ج}{ب}) = ۰$

یعنی $لا (لا^۲ - ا^۲) (ب لا - ج) = ۰$

یا $ب لا^۴ - ج لا^۳ - ا^۲ ب لا^۲ + ا^۲ ج لا = ۰$

۱۱۳- نتائج دفعہ ۱۱۰ نہایت ضروری ہیں اور مساوات درجۂ دوم کی اصلوں کے متعلق جو بھی سوالات ہوں اُن کو حل کرنے کے لیے عام طور پر کافی ثابت ہوتے ہیں۔ ایسے سوالات میں ہمیں مساوات کی اصلوں پر علیحدہ علیحدہ غور نہیں کرنا چاہیے - لیکن ان کے حاصل جمع اور حاصل ضرب کو مساوات کے سروں کی رقوم میں لکھنے سے جو ارتباطات حاصل ہوں ان کو استعمال کرنا چاہیے۔

مثال ۱- اگر ا اور ب مساوات $لا^۲ - ف لا + ق = ۰$ کی اصلیں ہوں تو (۱) $ا^۲ + ب^۲$ (۲) $ا^۳ + ب^۳$ کی اصلیں دریافت کرو۔

یہاں $ا + ب = ف$ اور $ا ب = ق$

$\therefore \quad ا^۲ + ب^۲ = (ا + ب)^۲ - ۲ ا ب = ف^۲ - ۲ ق$

نیز $ا^۳ + ب^۳ = (ا + ب)(ا^۲ + ب^۲ - ا ب)$

$= ف\{(ا + ب)^۲ - ۳ ا ب\}$

$= ف (ف^۲ - ۳ ق)$

مثال ۲- اگر ا اور ب مساوات $ل لا^۲ + م لا + ن = ۰$ کی اصلیں ہوں تو ایسی مساوات دریافت کرو جس کی اصلیں $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ب}{ا}$ ہوں۔ اصلوں کا

$$حاصل جمع = \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ا} = \frac{ا^۲ + ب^۲}{ا ب}$$

اصلوں کا حاصل ضرب $= \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = ۱$

اِس لیے دفعہ ۱۱۱ کے بموجب مساوات مطلوبہ ہے

$$\text{لا}^۲ - \left(\frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}{\text{اب}}\right)\text{لا} + ۱ = ۰$$

یا $\text{اب لا}^۲ - (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)\,\text{لا} + \text{اب} = ۰$

ہم مثالِ بالا کے طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ = \frac{\text{م}^۲ - ۲\,\text{ن ل}}{\text{ل}^۲} \quad \text{اور} \quad \text{اب} = \frac{\text{ن}}{\text{ل}}$$

اس لیے مساوات مطلوبہ ہے $\frac{\text{ن}}{\text{ل}}\,\text{لا}^۲ - \frac{\text{م}^۲ - ۲\,\text{ن ل}}{\text{ل}^۲}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}}{\text{ل}} = ۰$

یا $\text{ن ل لا}^۲ - (\text{م}^۲ - ۲\,\text{ن ل})\,\text{لا} + \text{ن ل} = ۰$

**مثال ۳۔** اگر $\text{لا} = \frac{۳ + ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ تو $۲\,\text{لا}^۳ + ۲\,\text{لا}^۲ - ۷\,\text{لا} + ۷۲$ کی قیمت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی اگر ہم لا کی بجائے جملۂ مجوزہ میں $\frac{۳ - ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ لکھ دیں۔

سب سے پہلے ایک ایسی مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں $\frac{۳ \pm ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ ہوں اصلوں کا مجموعہ $= ۳$ اور قیمتوں کا حاصل ضرب $= \frac{۱۷}{۲}$

اس لیے مساوات ہوئی $۲\,\text{لا}^۲ - ۶\,\text{لا} + ۱۷ = ۰$

پس $۲\,\text{لا}^۲ - ۶\,\text{لا} + ۱۷$ ایک ایسا جملہ درجۂ دوم ہے جو $\frac{۳ \pm ۵\sqrt{-۱}}{۲}$ میں سے ہر ایک قیمت کے لیے نابود ہوتا ہے۔

اب ۲ لا$^{۳}$ + ۲ لا$^{۲}$ − ۷ لا + ۷۲ = لا (۲ لا$^{۲}$ − ۶ لا + ۱۷)
+ ۴ (۲ لا$^{۲}$ − ۶ لا + ۱۷) + ۴ = لا × ۰ + ۴ × ۰ + ۴ = ۴ اور یہ ہر ایک صورتِ مفروضہ میں جملہ کی عددی قیمت ہے۔

۱۴۱۔ کن شرائط کے تحت مساوات ﻟ لا$^{۲}$ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں (۱) مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف (۲) ایک دوسرے کی مقلوب ہونگی؟

اصلیں مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہونگی اگر اُن کا حاصل جمع صفر ہو اس لیے شرط مطلوبہ ہے۔ $\frac{\text{ب}}{\text{ﻟ}}$ = ۰ یعنی ب = ۰ اگر اصلیں ایک دوسری کی متکافی ہوں تو اُن کا حاصل ضرب ایک ہوگا۔

اس لیے $\frac{\text{ج}}{\text{ﻟ}}$ = ۱ یعنی ج = ﻟ

نتیجۂ اول ہندسۂ تحلیلی میں اکثر استعمال ہوتا ہے اور نتیجۂ دوم ایک ایسی شرطِ عامہ کی خاص صورت ہے جو ہر ایک درجہ کی مساوات کے لیے درست ہے۔

مثال ۱۔ کن شرائط کے پورا ہونے پر مساوات ﻟ لا$^{۲}$ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں (۱) دونوں مثبت ہونگی (۲) علامت میں مختلف ہونگی مگر اُن میں سے بڑی منفی ہوگی۔

اگر دی ہوئی مساوات کی اصلیں عہ اور بہ ہوں تو

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ﻟ}}$$

$$\text{عہ بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ﻟ}}$$

(۱) اگر دونوں اصلیں مثبت ہوں تو حاصلِ ضرب عہ بہ مثبت ہوگا اور اس لیے ج کی وہی علامت ہوگی جو ﻟ کی۔

نیز چونکہ عہ + بہ مثبت ہے اس لیے $\frac{ب}{ا}$ منفی ہے اس لیے ب اور ا کی علامات مختلف ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ شرط مطلوبہ یہ ہے کہ ا اور ج کی علامتیں متشابہ مگر ب کی علامت سے مختلف ہوں۔

(۲) اگر اصلیں علامت میں مختلف ہوں تو حاصلِ ضرب عہ بہ منفی ہوگا اور اس لیے ج کی علامت ا سے مختلف ہوگی۔

نیز عہ + بہ کی وہی علامت ہے جو مساوات کی بڑی قیمت کی اور یہ قیمت منفی ہے اس لیے $\frac{ب}{ا}$ مثبت ہے اس لیے ا اور ب کی علامات متشابہ ہیں۔

اس لیے شرطِ مطلوبہ یہ ہے کہ ا اور ب کی علامتیں متشابہ مگر ج کی علامت سے مختلف ہوں۔

**مثال ۲۔** کن شرائط کے تحت مساوات $ا لا^2 + ب لا + ج = ۰$ کی (۱) ایک اصل صفر ہوگی (۲) دونوں اصلیں صفر ہونگی (۳) ایک اصل لامتناہی ہوگی (۴) دونوں اصلیں لامتناہی ہونگی؟

$$عہ + بہ = -\frac{ب}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$عہ \times بہ = \frac{ج}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

صورتِ اوّل۔ اگر ایک اصل صفر ہو تو $عہ \times بہ = \frac{ج}{ا} = ۰$

جس سے معلوم ہوا کہ $ج = ۰$

صورتِ دوم۔ اگر دونوں اصلیں صفر ہوں تو

$$عہ + بہ = -\frac{ب}{ا} = ۰$$

یعنی ب = ۰ اور عہ بہ = $\frac{ج}{ا}$ = ۰ یعنی ج = ۰

پس اس صورت میں ب = ج = ۰

اگر مساوات کی کوئی اصل صفر نہ ہو تو $لا^۲$ پر تقسیم کرنے سے ہم اس شکل کو ذیل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$ا + ب \frac{۱}{لا} + ج \left(\frac{۱}{لا}\right)^۲ = ۰$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{لا}$ = ما، تب

$$ج\ ما^۲ + ب\ ما + ا = ۰ \quad ............ (۲)$$

اس مساوات کی اصلیں $\frac{۱}{عہ}$ اور $\frac{۱}{بہ}$ ہیں۔

صورتِ سوم۔ اگر عہ لا انتہا بڑا ہو تو $\frac{۱}{عہ}$ لا انتہا چھوٹا ہوگا۔ یعنی مساوات (۳) کی ایک اصل صفر ہوگی اور اس کے لیے ضروری ہے کہ ا = ۰ بموجب صورتِ اول۔

صورتِ چہارم۔ اگر عہ اور بہ دونوں لا انتہا بڑے ہوں تو $\frac{۱}{عہ}$ اور $\frac{۱}{بہ}$ لا انتہا چھوٹے ہونگے یعنی اس صورت میں مساوات (۳) کی دونوں اصلیں صفر ہونگی اس لیے ضروری ہے کہ ا = ب = ۰، بموجب صورتِ دوم۔

پس ثابت ہوا کہ مساوات ا $لا^۲$ + ب لا + ج = ۰ کی ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی اگر $لا^۲$ کا سر صفر ہو اور دونوں اصلیں لا انتہا بڑی ہونگی اگر $لا^۲$ اور لا دونوں کے سر صفر ہوں۔

# امثلہ نمبری ۱۹

جن مساواتوں کی اصلیں حسبِ ذیل ہیں انہیں مرتب کرو۔

۱- $-\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۳}{۷}$　　۲- $\frac{م}{ن}$ ، $-\frac{ن}{م}$

۳- (ف - ق)/(ف + ق) ، (ف + ق)/(ف - ق)    ۴- - ف ± ۲ √(۲ق)

۵- - ۳ ± ۵ √-۱    ۶- - ا ± ب √-۱

۷- ا/۲ ، - ۲/ا    ۸- ۲ ± √۳ ، ۴

۹- ثابت کرو کہ معادلات ذیل کی اصلیں حقیقی ہیں۔

(۱) لا² - ۲ الا + ا² - ب² - ج² = ۰

(۲) (ا - ب + ج) لا² + ۴(ا - ب) لا + (ا - ب - ج) = ۰

۱۰- ثابت کرو کہ مساوات لا² + ۲(ف + ق) لا + ۲(ف² + ق²) = ۰ کی اصلیں خیالی ہیں۔

۱۱- ثابت کرو کہ مساوات {ج² - ۲ ب ج + ب²} لا² - ۲{ج² - (ا + ب) ج + ا ب} لا + {۲ ا² - ۲ ا(ب + ج) + ب² + ج²} = ۰ کی اصلیں خیالی ہیں۔

۱۲- ثابت کرو کہ مساوات (لا - ب)(لا - ج) + (لا - ج)(لا - ا) + (لا - ا)(لا - ب) = ۰ کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں جب تک کہ ا، ب، ج ایک دوسرے کے برابر نہ ہوں۔

۱۳- اگر مساوات لا² - ۱۵ - م(۲ لا - ۸) = ۰ کی اصلیں مساوی ہوں تو م کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۴- م کی کس قیمت کے لیے مساوات (لا² - ب لا)/(ا لا - ج) = (م - ۱)/(م + ۱) کی اصلیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی؟

۱۵- ثابت کرو کہ معادلات ذیل کی اصلیں ناطق ہیں:

(۱) (ا + ج - ب) لا² + ۲ ج لا + (ب + ج - ا) = ۰

(۲) ا ب ج² لا² + ۳ ا² ج لا + ب² ج لا - ۶ ا² - ا ب + ۲ ب² = ۰

اگر عہ اور بہ مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۶۔ ۱/عہ^۲ + ۱/بہ^۲ ۱۷۔ عہ^۳ بہ^۲ + عہ^۲ بہ^۳

۱۸۔ (عہ/بہ − بہ/عہ)^۲

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۹۔ لا^۳ + لا^۲ − لا + ۲۲ جب کہ لا = ۱ + ۲ √−۱

۲۰۔ لا^۳ − ۳ لا^۲ − ۸ لا + ۱۵ جب کہ لا = ۳ + √−۱

۲۱۔ لا^۳ − ا لا^۲ + ۲ ا^۲ لا + ۴ ا^۳ جب کہ لا/ا = ۱ − √−۳

۲۲۔ اگر عہ اور بہ مساوات لا^۲ + ف لا + ق = ۰ کی اصلیں ہوں تو ایسی مساوات مرتب کرو جس کی اصلیں (عہ − بہ)^۲ اور (عہ + بہ)^۲ ہوں۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ مساوات (لا − ا) (لا − ب) = ھ^۲ کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہونگی۔

۲۴۔ اگر لا، لا مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) (ا لا + ب)^−۲ + (ا لا + ب)^−۲

(۲) (ا لا + ب)^−۳ + (ا لا + ب)^−۳

۲۵۔ اگر مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی ایک اصل دوسری کی ن گنی ہو تو ا، ب اور ج کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۶۔ ایک ایسی مساوات دریافت کرو جس کی اصلیں مساوات ۲ لا^۲ + ۲ (م + ن) لا + م^۲ + ن^۲ = ۰ کی اصلوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مربعوں کے برابر ہوں۔

۲۷۔ مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں عہ اور بہ ہیں

ایک ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عہ^۲ + بہ^۲ اور عہ^{-۲} + بہ^{-۲} ہوں

۲۸۔ مساوات ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰ کی اصلوں کی علامات پر بحث کرو۔

۱۱۵۔ مثال ذیل سے نتائج دفعہ ۱۱۳ کے استعمال کی توضیح ہوگی۔

**مثال۔** اگر لا کوئی مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ (لا^۲ + ۲ لا − ۱۱) / ۲ (لا − ۳) تمام عددی قیمتیں اختیار کر سکتا ہے سوائے ان قیمتوں کے جو ۲ اور ۶ کے درمیان واقع ہوں۔

فرض کرو کہ

ما = (لا^۲ + ۲ لا − ۱۱) / ۲ (لا − ۳)

ضرب دینے سے لا^۲ + ۲ لا (۱ − ما) + ۶ ما − ۱۱ = ۰

یہ ایک درجۂ دوم کی مساوات ہے اور اگر لا کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ضروری ہے کہ ۴ (۱ − ما)^۲ − ۴ (۶ ما − ۱۱) مثبت ہو یا ۴ پر تقسیم کرنے اور اختصار کے بعد ضروری ہے کہ ما^۲ − ۸ ما + ۱۲ مثبت ہو یعنی (ما − ۶) (ما − ۲) مثبت ہو۔

پس معلوم ہوا کہ اس حاصل ضرب کے دونوں اجزائے ضربی مثبت ہونے چاہییں یا دونوں منفی۔ پہلی صورت میں ما > ۶ اور دوسری صورت میں ما < ۲ اس لیے ثابت ہوا کہ ما کی قیمت ۲ اور ۶ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی مگر سوائے اس کے مابعین دیا ہوا جملہ باقی تمام عددی قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔

اس مثال میں یہ بات قابل غور ہے کہ جملہ درجۂ دوم ما^۲ − ۸ ما + ۱۲ کی قیمت مثبت ہے جب تک کہ ما کی قیمت مساوات درجۂ دوم ما^۲ − ۸ ما + ۱۲ = ۰ کی اصلوں کے درمیان واقع نہ ہو۔ یہ ایک مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے اس کی تحقیق ہم دفعۂ ذیل میں کرینگے۔

۱۱۶ — لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ ا لا^۲ + ب لا + ج کی علامت

وہی ہوگی جو ا کی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں اور لا کی قیمت ان اصلوں کے درمیان واقع ہو۔

جملہ ا لا² + ب لا + ج = ا { لا² + (ب / ا) لا + (ج / ا) }

= ا { (لا + ب / ۲ا)² + (ج / ا) − (ب² / ۴ا²) }

= ا { (لا + ب / ۲ا)² − (ب² − ۴ ا ج) / ۴ا² } ......(۱)

صورت اوّل ۔ فرض کرو کہ ب² − ۴ ا ج > ۰ . تب

جملہ ا لا² + ب لا + ج = ا { (لا + ب / ۲ا)² − (ب² − ۴ ا ج) / ۴ا² }

= ا { لا + ب / ۲ا − √(ب² − ۴ ا ج) / ۲ا } { لا + ب / ۲ا + √(ب² − ۴ ا ج) / ۲ا }

= ا (لا − عہ) (لا − بہ) جہاں عہ اور بہ دونوں مقادیر حقیقی ہیں اور مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ عہ > بہ

اب اگر لا > عہ تو اجزائے ضربی لا − عہ اور لا − بہ دونوں مثبت ہونگے اور اگر لا < بہ تو اجزائے ضربی لا − عہ اور لا − بہ دونوں منفی ہونگے۔ پس ہر حالت میں جملہ (لا − عہ) (لا − بہ) مثبت ہوگا اور ا لا² + ب لا + ج کی علامت وہی ہوگی جو ا کی۔

لیکن اگر لا کی قیمت عہ اور بہ کے درمیان واقع ہو تو جملہ (لا − عہ) (لا − بہ) کی علامت منفی ہوگی اور ا لا² + ب لا + ج کی علامت ا کی علامت سے مختلف ہوگی۔

صورت دوم ۔ فرض کرو کہ ب² − ۴ ا ج = ۰ . تو (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$ا لا^{۲} + ب لا + ج = ا \left(لا + \frac{ب}{۲ ا}\right)^{۲}$$

اور چونکہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے $\left(لا + \frac{ب}{۲ ا}\right)^{۲}$ مثبت ہے اس لیے ثابت ہوا کہ $ا لا^{۲} + ب لا + ج$ کی وہی علامت ہے جو ا کی ہے۔

صورت سوم۔ فرض کرو کہ $ب^{۲} - ۴ ا ج <$ یعنی مساوات کی اصلیں خیالی ہیں۔

$$\text{جملہ }\ ا لا^{۲} + ب لا + ج = ا \left\{ \left(لا + \frac{ب}{۲ ا}\right)^{۲} - \frac{ب^{۲} - ۴ ا ج}{۴ ا^{۲}} \right\} \ \text{بموجب (۱)}$$

$$= ا \left\{ \left(لا + \frac{ب}{۲ ا}\right)^{۲} + \frac{۴ ا ج - ب^{۲}}{۴ ا^{۲}} \right\}$$

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $\left(لا + \frac{ب}{۲ ا}\right)^{۲} + \frac{۴ ا ج - ب^{۲}}{۴ ا^{۲}}$ مثبت ہے کیونکہ وہ دو مثبت مقداروں کا مجموعہ ہے۔ اس لیے جملہ $ا لا^{۲} + ب لا + ج$ کی وہی علامت ہے جو ا کی ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۱۱۷۔ دفعہ سابق سے ظاہر ہے کہ اگر $ب^{۲} - ۴ ا ج$ منفی ہو یا صفر کے برابر ہو تو جملہ $ا لا^{۲} + ب لا + ج$ کی ہمیشہ ایک ہی علامت رہیگی خواہ لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کرے اور اگر یہ شرط پوری ہو تو جملہ مثبت ہوگا اگر ا مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر ا منفی ہو۔

برعکس اس کے جملہ $ا لا^{۲} + ب لا + ج$ کے ہمیشہ مثبت ہونے کے لیے ضروری ہے کہ $ب^{۲} - ۴ ا ج$ منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور ا مثبت ہو۔ نیز $ا لا^{۲} + ب لا + ج$ کے ہمیشہ منفی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ $ب^{۲} - ۴ ا ج$ منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور ا منفی ہو۔

**مثال ۱** - اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان ک کی قیمت کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ جملہ $\frac{ک لا^۲ - ۷ لا + ۵}{۵ لا^۲ - ۷ لا + ک}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کے قابل ہو سکے۔

فرض کرو کہ

$$\frac{ک لا^۲ - ۷ لا + ۵}{۵ لا^۲ - ۷ لا + ک} = م$$

تب $(ک - ۵ م) لا^۲ - ۷ لا (۱ - م) + (۵ - ک م) = ۰$

یہ لا میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔ چونکہ لا حقیقی ہے اس لیے ضروری ہے کہ

$۴۹ (۱ - م)^۲ - ۴ (ک - ۵ م) (۵ - ک م)$ منفی نہ ہو۔

یعنی $(۴۹ - ۲۰ ک) م^۲ + ۲ (۲ ک^۲ + ۱) م + (۴۹ - ۲۰ ک)$ منفی نہ ہو۔

اس لیے نتائج مندرجہ بالا کی استعانت سے ضروری ہے کہ

$(۲ ک^۲ + ۱)^۲ - (۴۹ - ۲۰ ک)^۲$ منفی ہو یا صفر ہو اور $۴۹ - ۲۰ ک$ مثبت ہو۔

اب $(۲ ک^۲ + ۱)^۲ - (۴۹ - ۲۰ ک)^۲$ منفی یا صفر ہوگا۔

اگر $۲ (ک^۲ - ۱۰ ک + ۲۵) \times ۲ (ک^۲ + ۱۰ ک - ۲۴)$ منفی یا صفر ہو۔

یعنی اگر $۴ (ک - ۵)^۲ (ک + ۱۲) (ک - ۲)$ منفی یا صفر ہو۔

اور یہ جملہ منفی ہے جب تک کہ ک کی قیمت ۲ اور - ۱۲ کے درمیان واقع ہے اور ایسی قیمتوں کے لیے $۴۹ - ۲۰ ک$ مثبت ہے۔

نیز جملہ مذکورہ اُس وقت صفر ہوگا جب ک = ۵ یا - ۱۲ یا ۲ لیکن جب ک = ۵ تو $۴۹ - ۲۰ ک$ منفی ہے۔ اس لیے ک کی قیمتوں کی حدود ۲ اور - ۱۲ ہیں اور ان کے درمیان اس کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔

# امثلہ نمبری ۹ ب

۱ - ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان ن کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ مساوات $۲ ک لا (ک لا + ن ج) + (ن^۲ - ۲) ج^۲ = ۰$ کی دو حقیقی اصلیں

ہوسکیں۔

۲۔ اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{\text{لا}}{\text{لا}^{2} - \text{۵ لا} + ۹}$ کی قیمت ہمیشہ ۱ اور $-\frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان واقع ہوگی۔

۳۔ ثابت کرو کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $\frac{\text{لا}^{2} - \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{2} + \text{لا} + ۱}$ کی قیمت ۳ اور $\frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہوگی۔

۴۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}^{2} + \text{۳۴ لا} - ۷۱}{\text{لا}^{2} + \text{۲ لا} - ۷}$ کی کوئی قیمت ۵ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہوسکتی۔

۵۔ ایسی مساوات دریافت کرو جس کی اصلیں $\frac{\sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{ا}} \pm \sqrt{\text{ا} - \text{ب}}}$ ہوں۔

۶۔ اگر عہ اور بہ مساوات $\text{لا}^{2} - \text{ف لا} + \text{ق} = ۰$ کی اصلیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) $\text{عہ}^{2}(\text{عہ}^{2}\,\text{بہ}^{-۱} - \text{بہ}) + \text{بہ}^{2}(\text{بہ}^{2}\,\text{عہ}^{-۱} - \text{عہ})$

(۲) $(\text{عہ} - \text{ف})^{-۴} + (\text{بہ} - \text{ف})^{-۴}$

۷۔ اگر $\text{ل لا}^{2} + \text{ن لا} + \text{ن} = ۰$ کی اصلوں کی باہمی نسبت ف : ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} + \sqrt{\frac{\text{ق}}{\text{ف}}} + \sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{ل}}} = ۰$$

۸۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{(\text{لا} + \text{م})^{2} - \text{۴ م ن}}{۲(\text{لا} - \text{ن})}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ ن اور ۲ م کے درمیان واقع ہوں۔

۹۔ اگر مساوات $\text{ا لا}^{2} + \text{۲ ب لا} + \text{ج} = ۰$ کی اصلیں عہ اور بہ ہوں

اور مساوات $\text{اَ لا}^2 + \text{۲ بَ لا} + \text{جَ} = \text{۰}$ کی اصلیں ھ + د اور ہ + د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ب}^2 - \text{ا ج}}{\text{ا}^2} = \frac{\text{بَ}^2 - \text{اَ جَ}}{\text{اَ}^2}$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{\text{ف لا}^2 + \text{۳ لا} - \text{۴}}{\text{ف} + \text{۳ لا} - \text{۴ لا}^2}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ ف کی قیمت ۱ اور ۷ کے درمیان واقع ہو۔

۱۱۔ لا کی حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $\frac{\text{لا} + \text{۲}}{\text{۲ لا}^2 + \text{۳ لا} + \text{۶}}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{\text{لا}^2 - \text{ب ج}}{\text{۲ لا} - \text{ب} - \text{ج}}$ کی قیمت ب اور ج کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

۱۳۔ اگر مساوات $\text{ا لا}^2 + \text{۲ ب لا} + \text{ج} = \text{۰}$ کی اصلیں حقیقی اور مختلف ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$(\text{ا} + \text{ج})(\text{ا لا}^2 + \text{۲ ب لا} + \text{ج}) = \text{۲}(\text{ا ج} - \text{ب}^2)(\text{لا}^2 + \text{۱})$$

کی اصلیں خیالی ہونگی اور برعکس اس کے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{(\text{ا لا} - \text{ب})(\text{د لا} - \text{ج})}{(\text{ب لا} - \text{ا})(\text{ج لا} - \text{د})}$ تمام قیمتیں قبول کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ $\text{ا}^2 - \text{ب}^2$ اور $\text{ج}^2 - \text{د}^2$ کی ایک ہی علامت ہو۔

۱۱۸۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم چند متفرق مسئلے اور مثالیں بیان کرینگے۔ مناسب ہوگا کہ ہم اس موقع پر طالب علم کو ایسی اصطلاحوں اور ترقیم سے مانوس کرائیں جو اعلیٰ ریاضی میں بکثرت

کام آتی ہیں۔

**تعریف**۔ اگر کسی مقدار کی قیمت مقدار لا کی قیمت پر منحصر ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اول الذکر مقدار تفاعل ہے لا کا۔

لا کے تفاعل کو عموماً ف (لا)، فا (لا)، فہ (لا) کی صورت کی علامتوں سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس مساوات ما = ف (لا) کے یہ معنی ہیں کہ لا کی قیمت کی ہر تبدیلی کے جواب میں ما کی قیمت میں ایک متناظر تبدیلی ہوگی اور برعکس اس کے۔ مقادیر لا اور ما کو متغیر کہتے ہیں اور مزید امتیاز کے لیے انھیں بالترتیب متغیر متبوع اور متغیر تابع کہتے ہیں۔

متغیر متبوع (خاص حدود کے اندر) کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے جو ہم اس کو دینا چاہیں اور متغیر تابع کی متناظر قیمت کا تعین اسی وقت ہو جاتا ہے جب متغیر تابع کی قیمت دے دی جاتی ہے۔

۱۱۹۔ $\text{ا}_0 \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$ کی

شکل کے جملہ کو، جہاں ن ایک صحیح مثبت عدد ہے اور عددی سر ول $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$ ...... $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں لا شریک نہیں ہے، لا میں ن ویں درجہ کا منطق، صحیح جبریہ تفاعل کہتے ہیں۔

اس باب میں ہم صرف اس قسم کے تفاعلوں پر بحث کریں گے۔

۱۲۰۔ اگر ایک تفاعل میں متغیر متبوع کی پہلی سے بڑی کوئی قوت واقع نہ ہو تو اس تفاعل کو درجۂ اول کا تفاعل کہتے ہیں، مثلاً ا لا + ب درجۂ اول کا تفاعل ہے لا کا۔ ایک تفاعل درجۂ دوم کا تفاعل کہلائیگا اگر اس میں متغیر کی کوئی قوت جس کا درجہ دو سے بڑا ہے، واقع نہ ہو، مثلاً $\text{ا لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ج}$ درجۂ دوم کا تفاعل ہے لا کا۔ تیسرے چوتھے ...... درجوں کے تفاعل وہ تفاعل ہیں جن میں بڑے سے بڑے

درجہ کی رقمیں بالترتیب تیسرے، چوتھے ........ درجوں کی ہوں۔ پس
دفعہ سابق میں دیا ہوا جملہ لا کا ن ویں درجہ کا تفاعل ہے۔

۱۲۱۔ دو مقادیر متغیر لا اور ما کے تفاعل کو علامت ف (لا، ما) سے
تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً ا لا + ب ما + ج اور

ا لا$^2$ + ۲ ھ لا ما + ب ما$^2$ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج

دو متغیروں لا اور ما کے بالترتیب درجۂ اول اور درجۂ دوم کے تفاعل ہیں۔
مساواتوں ف (لا) = ۰ اور ف (لا، ما) = ۰ کو درجۂ اول یا
درجۂ دوم کی مساواتیں کہیں گے بموجب اس کے کہ ان کے متقابل کے
تفاعل ف (لا)، ف (لا، ما) درجۂ اول یا درجۂ دوم کے ہوں۔

۱۲۲۔ دفعہ ۱۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جملہ ا لا$^2$ + ب لا + ج کو
شکل ا (لا - عہ) (لا - بہ) میں لکھا جا سکتا ہے جہاں عہ اور بہ مساوات
ا لا$^2$ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہیں۔
پس درجۂ دوم کا جملہ ا لا$^2$ + ب لا + ج درجۂ اول کے دو منطق
اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکیگا اگر ا لا$^2$ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں منطق
ہوں یعنی اگر ب$^2$ - ۴ ا ج کامل مربع ہو۔

۱۲۳۔ کس شرط کے پورا ہونے پر متغیروں لا اور ما کا ایک دیا ہوا درجۂ
دوم کا جملہ دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکیگا؟
دیے ہوئے جملہ یا تفاعل کو ف (لا، ما) سے تعبیر کرو جہاں
ف (لا، ما) = ا لا$^2$ + ۲ ھ لا ما + ب ما$^2$ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج
اس کو لا کی نزولی قوتوں میں ترتیب دو اور مساوی صفر کے لکھو —
پس ا لا$^2$ + ۲ لا (ھ ما + گ) + ب ما$^2$ + ۲ ف ما + ج = ۰
لا میں درجۂ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

لا = [ -(ھ ما + گ) ± √( (ھ ما + گ)$^2$ - ا (ب ما$^2$ + ۲ ف ما + ج) ) ] / ا

یعنی ا لا + ھ ما + گ = ± √( ما^۲ (ھ^۲ - ا ب) + ۲ ما (ھ گ - ا ف) + (گ^۲ - ا ج) )

اب اگر جملہ ف (لا، ما) شکل ل لا + م ما + ن کے دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے تو ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر کی مقدار مربع کامل ہو۔

یعنی (ھ گ - ا ف)^۲ = (ھ^۲ - ا ب) (گ^۲ - ا ج)

سب رقموں کو ایک طرف منتقل کرنے اور ا پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا کہ

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ھ^۲ = ۰

یہ مسئلہ ہندسہ تحلیلی میں بہت کارآمد ہے۔

نوٹ:- مندرجۂ بالا استدلال میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ ا صفر نہیں ہے، اگر ا صفر ہو تو دیے ہوئے جملہ کو ما کی نزولی قوتوں میں ترتیب دینے اور ما بین درجۂ دوم کی مساوات پر بحث کرنے سے یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

۱۲۴ - اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ مساواتوں ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ اور اَ لا^۲ + بَ لا + جَ = ۰ کی ایک اصل مشترک ہو۔

فرض کرو کہ لا = عہ دونوں مساواتوں کی مشترک اصل ہے۔

تب ا عہ^۲ + ب عہ + ج = ۰

اَ عہ^۲ + بَ عہ + جَ = ۰

اس لیے ضرب چلیپائی سے

عہ^۲ / (ب جَ - بَ ج) = عہ / (ج اَ - جَ ا) = ۱ / (ا بَ - اَ ب)

عہ کو ساقط کرنے کے لیے دوسری نسبت کا مربع لو اور اس کو باقی دو نسبتوں کے حاصل ضرب کے برابر لکھو۔

عہ^۲ / (ج اَ - جَ ا)^۲ = عہ^۲ / (ب جَ - بَ ج) × ۱ / (ا بَ - اَ ب)

اس لیے (ج اَ - جَ ا)$^2$ = (ب جَ - بَ ج) (ا بَ - اَ ب) شرط مطلوبہ ہے۔

نیز یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر درجۂ دوم کے دو جملوں ا لا$^2$ + ب لا ما + ج ما$^2$ اور اَ لا$^2$ + بَ لا ما + جَ ما$^2$ کا ایک جزو ضربی مشترک ہو تو اس صورت میں بھی یہی شرط ضروری ہوگی۔

# امثلہ نمبری ۹ ج

۱۔ معلوم کرو کہ م کی کن قیمتوں کے لیے جملہ ما$^2$ + ۲ لا ما + ۲ لا + م ما - ۳ دو ناطق اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے؟

۲۔ اگر جملہ ۲ لا$^2$ + م لا ما + ۳ ما$^2$ - ۵ ما - ۲ دو اجزائے ضربی درجۂ اول کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو م کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ جملہ ا (لا$^2$ - ما$^2$) - لا ما (ب - ج)، ہمیشہ دو حقیقی خطی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

۴۔ مساواتوں لا$^2$ + ف لا + ق = ۰ اور لا$^2$ + فَ لا + قَ = ۰ کی ایک اصل مشترک ہو تو ثابت کرو کہ یہ اصل (ف قَ - فَ ق) / (ق - قَ) یا (ق - قَ) / (فَ - ف) کے برابر ہوگی۔

۵۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ل لا$^2$ + م لا ما + ن ما$^2$ اور لَ لا$^2$ + مَ لا ما + نَ ما$^2$ کا ایک جزو ضربی درجۂ اول مشترک ہو۔

۶۔ اگر جملہ ۳ لا$^2$ + ۲ ف لا ما + ۲ ما$^2$ + ۲ ا لا - ۴ ما + ۱ اجزائے ضربی درجۂ اول میں تحلیل ہو سکے تو ثابت کرو کہ

ف مساوات ف$^2$ + ۴ ا ف + ۲ ا$^2$ + ۶ = ۰ کی ایک اصل ہے۔

۷۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ا لا$^2$ + ۲ ھ لا ما + ب ما$^2$ اور اَ لا$^2$ + ۲ ھَ لا ما + بَ ما$^2$ اجزائے ضربی ما - م لا اور م ما + لا کی صورت کے جملوں پر بالترتیب تقسیم ہو سکیں۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ مساوات لا$^{۲}$ ۔ ۳ لا ما + ۲ ما$^{۲}$ ۔ ۲ لا ۔ ۳ ما ۔ ۳۵ = ۰ میں لا کے لیے کوئی حقیقی قیمت مندرج کرنے سے ما کی ایک حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے اور ما کے لیے حقیقی قیمت مندرج کرنے سے لا کی حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے ۔

۹ ۔ اگر دو حقیقی مقداروں لا اور ما کا باہمی ربط مساوات ۹ لا$^{۲}$ + ۲ لا ما + ما$^{۲}$ ۔ ۹۲ لا ۔ ۲۰ ما + ۴۴۲ = ۰ کے مطابق ہو تو ثابت کرو کہ لا کی قیمت ۳ اور ۶ کے درمیان واقع ہو گی اور ما کی ۱ اور ۱۰ کے درمیان۔

۱۰ ۔ اگر ( اَ لا$^{۲}$ + ب لا + ج ) ما + اَ لا$^{۲}$ + بَ لا + جَ = ۰ تو ایسی شرط دریافت کرو کہ لا ایک ناطق جملہ ہو ما کا ۔

# باب دہم

## مساواتیں جو مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں

۱۲۵ ـــ اگر کسی مساوات صحیح ج (لا) = ۰ کی ایک اصل ل ہو تو ہم جانتے ہیں کہ ج (لا) = (لا ـ ل) ج۱ (لا) جہاں ج۱ (لا) کا درجہ ج (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہے اس لیے معلوم ہوا کہ مساوات مفروضہ ج (لا) = ۰ کا حل مساوات ج۱ (لا) = ۰ کے حل پر موقوف ہے اب ایسا ممکن ہے ج۱ (لا) = ۰ مساوات درجہ دوم ہو جس صورت میں اس کا حل حسب معمول حاصل ہو سکتا ہے۔

**مثال** مساوات، لا۳ ـ ۷لا۲ + ۳لا + ۳ = ۰ کی اصلیں دریافت کرو ظاہر ہے کہ لا = ۱ شرائط مساوات کو پورا کرتی ہے۔

اس لیے دی ہوئی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

(لا ـ ۱) (لا۲ ـ ۶لا ـ ۳) = ۰

مساوات، لا۲ ـ ۶لا ـ ۳ = ۰ کی اصلیں ۳ ± ۲√۳ ہیں۔

اس لیے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہوئیں ۱، ۳ + ۲√۳، ۳ ـ ۲√۳

ایسا ممکن ہے کہ کسی نہ کسی طرح سے ہم مساوات صحیح کو اس صورت میں تحلیل کر سکیں ف ق ر ............... = ۰ جہاں ف، ق، ر.......

درجۂ دوم کے صحیح جملے ہوں اس صورت میں مساوات زیرِ بحث کی اصلیں مساواتوں ف = ۰، ق = ۰، ر = ۰ ............ کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

**مثال**۔ مساوات ک (ا لا² + ب لا + ج)² ۔ گ (د لا² + ع لا + ف)² = ۰ کو حل کرو۔

دی ہوئی مساوات ہے

$$\left\{\sqrt{ک}\,(ا\,لا^{2} + ب\,لا + ج) + \sqrt{گ}\,(د\,لا^{2} + ع\,لا + ف)\right\}$$

$$\times \left\{\sqrt{ک}\,(ا\,لا^{2} + ب\,لا + ج) - \sqrt{گ}\,(د\,لا^{2} + ع\,لا + ف)\right\}$$

اس لیے مطلوبہ اصلیں درجۂ دوم کی مساواتوں

$$(ا\sqrt{ک} + د\sqrt{گ})\,لا^{2} + (ب\sqrt{ک} + ع\sqrt{گ})\,لا + ج\sqrt{ک} + ف\sqrt{گ} = ۰$$

اور

$$(ا\sqrt{ک} - د\sqrt{گ})\,لا^{2} + (ب\sqrt{ک} - ع\sqrt{گ})\,لا + ج\sqrt{ک} - ف\sqrt{گ} = ۰$$

کی چار اصلیں ہیں جو حسب معمول دریافت ہو سکتی ہیں۔

۱۲۶۔ فرض کرو کہ کسی مساوات کی تحویل صورت ذیل میں ہو سکتی ہے۔

یعنی $\{ج\,(لا)\}^{2} + ف\,\{ج\,(لا)\} + ق = ۰$

اگر اس میں ج (لا) کی جگہ ما لکھا جائے تو دریافت کرنے کے لیے مساوات $ما^{2} + ف\,ما + ق = ۰$ حاصل ہوگی۔

مساوات $ما^{2} + ف\,ما + ق = ۰$ کی اصلیں ہیں $\dfrac{-ف \pm \sqrt{ف^{2} - ۴ق}}{۲}$

اس لیے

$$ج\,(لا) = \frac{-ف + \sqrt{ف^{2} - ۴ق}}{۲}$$

$$ج\,(لا) = \frac{-ف - \sqrt{ف^{2} - ۴ق}}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب اگر ج (لا) جملہ درجۂ اول یا درجۂ دوم بلحاظ لا کے ہو تو (۱) کو

حل کرنے سے ہمیں دی ہوئی مساوات کی تمام اصلیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال ۱۔ $\text{۸ لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} - \text{۸ لا}^{-\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} = \text{۶۳}$ کو حل کرو۔

طرفین کو $\text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}}$ سے ضرب دینے اور عمل نقل سے

$$\text{۸ لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{ن}}} - \text{۶۳ لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} - \text{۸} = \text{۰}$$

اس لیے $(\text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} - \text{۸})(\text{۸ لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} + \text{۱}) = \text{۰}$

یعنی $\text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲ن}}} = \text{۸ یا } -\frac{\text{۱}}{\text{۸}}$

یا $\text{لا} = (\text{۲}^{\text{۳}})^{\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}}} \text{ یا } (-\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۳}}})^{\frac{\text{۲ن}}{\text{۳}}}$

∴ $\text{لا} = \text{۲}^{\text{۲ن}} \text{ یا } \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}}$

مثال ۲۔ $\text{۲}^{\text{۲لا}} - \text{۳} \times \text{۲}^{\text{لا+۲}} + \text{۳۲} = \text{۰}$ کو حل کرو۔

یہ مساوات صورتِ ذیل میں لکھی جا سکتی ہے۔

$$(\text{۲}^{\text{لا}})^{\text{۲}} - \text{۱۲}(\text{۲}^{\text{لا}}) + \text{۳۲} = \text{۰}$$

یعنی $(\text{۲}^{\text{لا}} - \text{۴})(\text{۲}^{\text{لا}} - \text{۸}) = \text{۰}$

اس لیے $\text{۲}^{\text{لا}} = \text{۴ یا } \text{۲}^{\text{لا}} = \text{۸}$

پہلی مساوات کی ایک حقیقی اصل لا = ۲ ہے اور دوسری کی لا = ۳

مثال ۳۔ $\text{۲}\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{د}}} + \text{۳}\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{لا}}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} + \frac{\text{۶د}}{\text{ب}}$ کو حل کرو۔

فرض کرو کہ $\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{د}}} = \text{ما}$ تب $\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{لا}}} = \frac{\text{۱}}{\text{ما}}$

∴ ۲م + ۳/م = ب/ل + ۶ل/ب

کسروں کو دور کرنے سے ۲ل ب م² - ۶ل² م - ب² م + ۳ل ب = ۰

یعنی (۲ل م - ب)(ب م - ۳ل) = ۰

جس سے م = ب/۲ل یا ۳ل/ب

اس لیے لا/ل = ب²/۴ل² یا ۹ل²/ب²

یعنی لا = ب²/۴ل یا ۹ل³/ب²

**مثال ۴** - (لا - ۵)(لا - ۷)(لا + ۶)(لا + ۴) = ۵۰۴ کو حل کرو۔

بائیں جانب کے پہلے اور چوتھے اجزائے ضربی اور دوسرے اور تیسرے اجزائے ضربی کو ضرب دینے سے

(لا² - لا - ۲۰)(لا² - لا - ۴۲) = ۵۰۴

اگر اس کو (لا² - لا) کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات کی شکل میں ترتیب دیں تو حاصل ہوگا۔

(لا² - لا)² - ۶۲(لا² - لا) + ۳۳۶ = ۰

∴ (لا² - لا - ۶)(لا² - لا - ۵۶) = ۰

∴ لا² - لا - ۶ = ۰ یا لا² - لا - ۵۶ = ۰

یعنی لا = ۳، -۲، ۸، -۷

۱۲۷ - اگر کوئی مساوات صورت

ل لا² + ب لا + ج + ف √(ل لا² + ب لا + ج) = ق کی شکل میں لکھی جا سکتی ہو تو اس کا حل اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ م = √(ل لا² + ب لا + ج)

تب ما$^{2}$ + ف ما - ق = ۰

اگر عہ اور بہ اس مساوات کی اصلیں ہوں تو

√(ا لا$^{2}$ + ب لا + ج) = عہ اور √(ا لا$^{2}$ + ب لا + ج) = بہ

ان مساواتوں سے ہمیں لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہونگی۔

علامت جذر کے ماقبل جب کوئی علامت نہ ہو تو عموماً علامت مثبت کو متصرف خیال کرتے ہیں۔ اس لیے اگر عہ اور بہ دونوں مثبت ہوں تو لا کی چاروں اصلیں اصلی مساوات کی شرائط کو پورا کرینگی اگر عہ اور بہ میں سے ایک بھی منفی ہو تو اس کے جواب میں جو مساوات درجۂ دوم حاصل ہوگی اس کی اصلیں

ا لا$^{2}$ + ب لا + ج - ف √(ا لا$^{2}$ + ب لا + ج) = ق کو پورا کرینگی

لیکن اصلی مساوات کی شرائط کو پورا نہیں کرینگی۔

**مثال ۱۔** لا$^{2}$ - ۵ لا + ۲ √(لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳) = ۱۲ کو حل کرو۔

طرفین میں ۳ جمع کرنے سے

لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳ + ۲ √(لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳) = ۱۵

اب فرض کرو کہ √(لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳) = ما

تب ما$^{2}$ + ۲ ما - ۱۵ = ۰ جس سے ما = ۳ یا - ۵

اس لیے √(لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳) = + ۳

یا √(لا$^{2}$ - ۵ لا + ۳) = - ۵

ان مساواتوں کا مربع لینے اور حل کرنے سے ہمیں مساوات اول سے حاصل ہوگا لا = ۶ یا - ۱ اور مساوات دوم سے حاصل ہوگا لا = (۵ ± √۱۱۳) / ۲

پہلی دو اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں مگر دوسری دو اصلیں جو ما = -۵ کے جواب میں حاصل کی گئیں مساوات لا۲ - ۵ لا - ۲ √(لا۲ - ۵ لا + ۳) = ۱۲ کو پورا کرتی ہیں۔

**مثال ۲** ۔ مساوات لا۲ - ۷ لا + √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) = ۲۴ کو حل کرو

طرفین میں ۱۸ جمع کرنے سے لا۲ - ۷ لا + ۱۸ + √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) = ۴۲ دائیں طرف کو مربع کامل بناؤ تو حاصل ہوگا،

لا۲ - ۷ لا + ۱۸ + √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) + ۱/۴ = ۴۲ ۱/۴ = ۱۶۹/۴

اِس لیے √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) + ۱/۲ = ± ۱۳/۲

∴ √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) = ۶ یا -۷

یعنی لا۲ - ۷ لا + ۱۸ = ۳۶ یا ۴۹

اب ہمیں درجہ دوم کی دو مساواتیں حل کرنی ہیں۔ پہلی سے ہمیں حاصل ہوگا،

لا = ۹ یا -۱ اور دوسری سے لا = ۱/۲ (۷ ± √۱۶۳)

جانچنے سے معلوم ہوگا کہ پہلی دو اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں لیکن دوسری دو اصلیں مساوات

لا۲ - ۷ لا - √(لا۲ - ۷ لا + ۱۸) = ۲۴ کو پورا کرتی ہیں۔

**۱۲۸** ۔ کسی مساوات میں جذر کی علامتوں کو دور کرنے کے لیے طرفین کا مربع لینے سے پہلے یہ جانچ لینا مناسب ہے کہ مساوات کی طرفین میں کوئی مشترک جزو ضربی ہے یا نہیں۔

## مثال ۱ ۔ مساوات

√(لا۲ - ۷ ا لا + ۱۰ ا۲) - √(لا۲ + ا لا - ۶ ا۲) = لا - ۲ ا کو حل کرو۔

دی ہوئی مساوات ہے

√((لا - ۲ ا)(لا - ۵ ا)) - √((لا - ۲ ا)(لا + ۳ ا)) = لا - ۲ ا

اِس میں طرفین کا مشترک جزو ضربی $\sqrt{\text{لا} - ۲\,\text{ا}}$ ہے۔ اس مشترک جزو ضربی کو صفر کے مساوی بنانے سے دی ہوئی مساوات کا ایک حل یعنی لا = ۲ ا حاصل ہوتا ہے۔

اس مشترک جزو ضربی کو دور کرنے کے بعد مساوات ہو جاتی ہے۔

$$\sqrt{\text{لا} - ۵\,\text{ا}} - \sqrt{\text{لا} + ۳\,\text{ا}} = \sqrt{\text{لا} - ۲\,\text{ا}}$$

طرفین کا مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لا} - ۵\,\text{ا} + \text{لا} + ۳\,\text{ا} - ۲\sqrt{(\text{لا} - ۵\,\text{ا})(\text{لا} + ۳\,\text{ا})} = \text{لا} - ۲\,\text{ا}$$

یعنی $\text{لا} = ۲\sqrt{(\text{لا} - ۵\,\text{ا})(\text{لا} + ۳\,\text{ا})}$

پھر طرفین کا مربع لینے اور سب رقموں کو ایک طرف لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$۳\,\text{لا}^۲ - ۸\,\text{ا}\,\text{لا} - ۶۰\,\text{ا}^۲ = ۰$$

یعنی $(\text{لا} - ۶\,\text{ا})(۳\,\text{لا} + ۱۰\,\text{ا}) = ۰$

یعنی $\text{لا} = ۶\,\text{ا}$ یا $-\frac{۱۰\,\text{ا}}{۳}$

جانچ کر دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ اصل لا = ۶ ا دی ہوئی مساوات کو پورا نہیں کرتی۔ پس دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں۔ ۲ ا اور $-\frac{۱۰\,\text{ا}}{۳}$

**نوٹ۔** اگر کسی مساوات کو صحیح شکل میں تحویل کرنے کے لیے طرفین کو کسی جملہ سے ضرب دیا جائے یا طرفین کا مربع لیا جائے تو تحویل شدہ مساوات میں اکثر ایسی اصلیں داخل ہو جاتی ہیں جو دی ہوئی مساوات سے بیگانہ ہیں۔ ایسی ہر صورت میں طالب علم یہ جانچ لے کہ تحویل شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کون سی اصل یا اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

**مثال ۲۔** $\sqrt{۲\,\text{لا}^۲ - ۴\,\text{لا} + ۱} + \sqrt{\text{لا}^۲ - ۵\,\text{لا} + ۲}$

$$= \sqrt{(۲لا^۲ - ۲لا + ۳)} + \sqrt{(لا^۲ - ۳لا + ۴)} \quad \ldots\ldots (۱)$$

عمل نقل سے

$$\sqrt{(۲لا^۲ - ۴لا + ۱)} - \sqrt{(لا^۲ - ۳لا + ۴)}$$

$$= \sqrt{(۲لا^۲ - ۲لا + ۳)} - \sqrt{(لا^۲ - ۵لا + ۲)}$$

طرفین کا مربع لینے سے $۳لا^۲ - ۷لا + ۵ - ۲\sqrt{(۲لا^۲ - ۴لا + ۱)(لا^۲ - ۳لا + ۴)}$

$$= ۳لا^۲ - ۷لا + ۵ - ۲\sqrt{(۲لا^۲ - ۲لا + ۳)(لا^۲ - ۵لا + ۲)}$$

یعنی $\sqrt{(۲لا^۴ - ۱۰لا^۳ + ۲۱لا^۲ - ۱۹لا + ۴)}$

$$= \sqrt{۲لا^۴ - ۱۲لا^۳ + ۱۷لا^۲ - ۱۹لا + ۶} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۲) کا مربع لینے اور عملِ نقل سے $لا^۳ + ۲لا^۲ - ۱ = ۰$

یعنی $(لا + ۱)(لا^۲ + لا - ۱) = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$

اس لیے (۳) کی اصلیں ہوئیں $-۱$ اور $\frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اب $لا = -۱$ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہے اور باقی دو اصلیں مساوات (۱) کو پورا نہیں کرتیں کیونکہ اگر $لا = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ تو $لا^۲ + لا - ۱ = ۰$

اِس لیے $لا^۲ = -لا + ۱$ اب $لا^۲$ کی یہ قیمت استعمال کرنے سے مساوات (۱) مساوات $\sqrt{(-۶لا + ۳)} = \sqrt{(-۴لا + ۵)}$ میں تحویل ہوتی ہے جو $لا = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ سے پوری نہیں ہوتی۔

**۱۲۹** – چند صورتوں میں ذیل کی تدبیر (artifice) مفید ثابت ہوتی ہے

**مثال** – مساوات $\sqrt{۳لا^۲ - ۴لا + ۳۴} + \sqrt{۳لا^۲ - ۴لا - ۱۱} = ۹ \quad \ldots (۱)$ کو حل کرو۔

لا کی ہر قیمت کے لیے ذیل کا رشتہ درست ہے۔

(۳ لا$^2$ - ۴ لا + ۳۴) - (۳ لا$^2$ - ۴ لا - ۱۱) = ۴۵ ........ (۲)

رشتہ (۲) کے ہر رکن کو رشتہ (۱) کی نظیر کے رکن پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$\sqrt{}$ ۳ لا$^2$ - ۴ لا + ۳۴ - $\sqrt{}$ ۳ لا$^2$ - ۴ لا - ۱۱ = ۵ ...... (۳)

رشتہ (۲) ایک مساوات متماثلہ ہے جو لا کی ہر قیمت کے لیے درست ہے، لیکن مساوات (۱) لا کی صرف چند خاص قیمتوں کے لیے درست ہے۔ پس مساوات (۳) لا کی صرف اِن قیمتوں کے لیے درست ہے جو رشتہ (۱) کو پورا کرتی ہیں۔

(۱) اور (۳) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$\sqrt{}$ ۳ لا$^2$ - ۴ لا + ۳۴ = ۷

جس سے لا = ۳ یا - $\frac{۵}{۳}$

## ۱۳۰- متکافی مساواتیں

مساوات درجۂ چہارم کی ایک مشہور قسم ترکیب ذیل سے مساوات درجۂ دوم کی صورت میں تحویل ہو سکتی ہے۔

مساوات ا لا$^4$ + ب لا$^3$ + ج لا$^2$ + ب لا + ا = ۰ ........ (۱)

پر غور کرو۔ اس مساوات میں شروع اور اخیر سے برابر برابر فاصلوں پر جو رقمیں ہیں ان کے سر باہم مساوی ہیں۔ ایسی مساواتوں کو متکافی مساواتیں کہتے ہیں کیونکہ ان میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ درج کرنے سے کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

لا$^2$ پر تقسیم کرنے سے مساوات (۱) صورتِ ذیل میں لکھی جا سکتی ہے:-

ا (لا$^2$ + $\frac{۱}{لا^2}$) + ب (لا + $\frac{۱}{لا}$) + ج = ۰ ............ (۲)

یعنی $ا\left(لا+\frac{1}{لا}\right)^2+ب\left(لا+\frac{1}{لا}\right)+ج-۲ا=۰$ ..... (۳)

رشتہ (۳) $لا+\frac{1}{لا}$ میں درجۂ دوم کی مساوات ہے۔
اگر مساوات (۳) کی اصلیں عہ اور بہ ہوں تو $لا+\frac{1}{لا}=$ عہ یا بہ

یعنی $لا^2-عہ\,لا+۱=۰$
یا $لا^2-بہ\,لا+۱=۰$ ..................... (۴)

اور ان درجۂ دوم کی دو مساواتوں کی چار اصلیں ہونگی جو دی ہوئی مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $۱۲لا^4-۵۶لا^3+۸۹لا^2-۵۶لا+۱۲=۰$ کو حل کرو۔

$لا^2$ پر تقسیم کرنے اور ترتیب دینے سے

$$۱۲\left(لا^2+\frac{1}{لا^2}\right)-۵۶\left(لا+\frac{1}{لا}\right)+۸۹=۰$$

فرض کرو کہ $لا+\frac{1}{لا}=ی$ تب $لا^2+\frac{1}{لا^2}=ی^2-۲$

$\therefore\ ۱۲(ی^2-۲)-۵۶ی+۸۹=۰$
جس سے حاصل ہوتا ہے، $ی=\frac{۵}{۲}$ یا $\frac{۱۳}{۶}$

یعنی $لا+\frac{1}{لا}=\frac{۵}{۲}$ یا $\frac{۱۳}{۶}$

اور اِن مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$لا=۲،\ \frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۲}،\ \frac{۲}{۳}$$

مثال ۲۔ $+۱$ کے پانچویں جذر کی قیمتیں دریافت کرو۔
ہمیں مساوات $لا^5=+۱$ یعنی $لا^5-۱=۰$ حل کرنی ہے اِس مساوات کی تحلیل ان دو مساواتوں میں ہو سکتی ہے۔

$$\left.\begin{array}{l}\text{لا} - ۱ = ۰ \\ \text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱ = ۰\end{array}\right\}$$

دوسری مساوات درجۂ چہارم کی متکافی مساوات ہے اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۲} + \left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right) - ۱ = ۰$$

اِس مساوات کو بلحاظ $\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$ کے حل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} = -\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

ان سے درجۂ دوم کی دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں، یعنی

$$\text{لا}^{۲} + \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

اور $$\text{لا}^{۲} + \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

ان مساواتوں سے لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$-\frac{(۱ + \sqrt{۵})}{۴} \pm \text{خ}\frac{\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}}{۴}\,،\quad -\frac{(۱ - \sqrt{۵})}{۴} \pm \text{خ}\frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

مندرجۂ بالا چار قیمتیں اور ایک + ۱ کے پانچویں جذر کی پانچ قیمتیں ہیں۔

**۱۳۱**۔ اگرچیکہ ذیل کی مساوات متکافی نہیں ہے تاہم اس کو دفعۂ سابق کے طریقہ سے حل کر سکتے ہیں۔

**مثال**۔ مساوات $۶\,\text{لا}^{۴} - ۲۵\,\text{لا}^{۳} + ۱۲\,\text{لا}^{۲} + ۲۵\,\text{لا} + ۶ = ۰$ کو حل کرو۔ $\text{لا}^{۲}$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$۶\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right) - ۲۵\left(\text{لا} - \frac{۱}{\text{لا}}\right) + ۱۲ = ۰$$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$6\left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right)^2 - 25\left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right) + 24 = 0$$

$$\therefore \quad 2\left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right) - 3 = 0 \text{، یا } 3\left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right) - 8 = 0$$

اوران آخری رشتوں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = 2\text{، } -\frac{1}{2}\text{، } 3\text{، } -\frac{1}{3}$$

**١٣٢**- اگر درجۂ دوم کی مساوات کی ایک اصل صاف طور پر ظاہر ہو تو درجۂ دوم کی مساوات کی اصلوں کے اُن باہمی رشتوں کی مدد سے جو دفعہ ١١٠ میں حاصل کی گئیں دوسری اصل آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

**مثال**- مساوات $(1-\text{ا}^2)(\text{لا}+\text{ا}) - 2\text{ا}(1-\text{لا}^2) = 0$ کو حل کرو۔

یہ لا میں درجۂ دوم کی مساوات ہے جس کی ایک اصل صریحاً ا ہے نیز دی ہوئی مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$2\text{ا}\text{لا}^2 + (1-\text{ا}^2)\text{لا} - \text{ا}(1+\text{ا}^2) = 0$$

اِس کی اصلوں کا حاصل ضرب ہے $-\dfrac{1+\text{ا}^2}{2}$

اِس لیے دی ہوئی مساوات کی دوسری اصل $-\dfrac{1+\text{ا}^2}{2\text{ا}^2}$ ہے۔

## امثلہ نمبری ١٠١

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

١- $\text{لا}^{-2} - 2\text{لا}^{-1} = 8$

٢- $2\sqrt{\text{لا}} + 2\text{لا}^{-\frac{1}{2}} = 5$

٣- $6\text{لا}^{\frac{3}{4}} = 7\text{لا}^{\frac{1}{4}} - 2\text{لا}^{-\frac{1}{4}}$

٤- $3\text{لا}^{\frac{2}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{1}{\text{ن}}} - 2 = 0$

٥- $\text{لا}^4 - \text{لا}^2(\text{ب}^2+\text{ج}^2) + \text{ب}^2\text{ج}^2 = 0$

٦- $(9^{\text{لا}})^{\text{لا}} - 2(3^{\text{لا}})^{\text{لا}} \times 3^{\text{لا}+1} = 3^{2\text{لا}+3}$

۷ـ $\text{۹} + \text{لا}^{-\text{۴}} = \text{۱۰لا}^{-\text{۲}}$　　۸ـ $\text{۵}\sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{لا}}} + \text{۷}\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{۳}}} = \text{۲۲}\,\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$

۹ـ $\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا}-\text{۱}}} + \sqrt{\frac{\text{لا}-\text{۱}}{\text{لا}}} = \text{۲}\,\frac{\text{۱}}{\text{۶}}$

۱۰ـ $\text{۵}\,(\text{۵}^{\text{لا}} + \text{۵}^{-\text{لا}}) = \text{۲۶}$　　۱۱ـ $\text{۲}^{\text{۲لا}+\text{۸}} + \text{۱} = \text{۳۲} \times \text{۲}^{\text{لا}}$

۱۲ـ $\sqrt{\text{۲}^{\text{لا}}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}^{\text{لا}}}} = \text{۲}$

۱۳ـ $(\text{لا}-\text{۷})(\text{لا}-\text{۳})(\text{لا}+\text{۵})(\text{لا}+\text{۱}) = -\text{۱۶۸}$

۱۴ـ $(\text{لا}+\text{۹})(\text{لا}-\text{۳})(\text{لا}-\text{۷})(\text{لا}+\text{۵}) = \text{۳۸۵}$

۱۵ـ $\text{لا}\,(\text{۲لا}+\text{۱})(\text{لا}-\text{۲})(\text{۲لا}-\text{۳}) = \text{۶۳}$

۱۶ـ $(\text{۲لا}-\text{۷})(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۹})(\text{۲لا}+\text{۵}) = \text{۹۱}$

۱۷ـ $(\text{لا}+\text{۳})(\text{لا}+\text{۸})(\text{لا}+\text{۱۳})(\text{لا}+\text{۱۸}) = \text{۵۱}$

۱۸ـ $\text{۳لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \sqrt{\text{۳لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} - \text{۶}} = \text{۱۸}$

۱۹ـ $\text{۳لا}^{\text{۲}} - \text{۷} + \text{۳}\sqrt{\text{۳لا}^{\text{۲}} - \text{۱۶لا} + \text{۲۱}} = \text{۱۶لا}$

۲۰ـ $\frac{\text{۳لا}-\text{۲}}{\text{۲}} + \sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۵لا} + \text{۳}} = \frac{(\text{لا}+\text{۱})^{\text{۲}}}{\text{۳}}$

۲۱ـ $\text{۷لا} - \frac{\text{۳لا}^{\text{۲}} - \text{۸لا} + \text{۱}}{\text{لا}} = \left(\sqrt{\text{لا}} + \frac{\text{۸}}{\sqrt{\text{لا}}}\right)^{\text{۲}}$

۲۲ـ $\sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵لا} - \text{۷}} + \sqrt{\text{۳}(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۷لا} + \text{۶})} - \sqrt{\text{۷لا}^{\text{۲}} - \text{۶لا} - \text{۱}} = \text{۰}$

۲۳ـ $\sqrt{\text{و}^{\text{۲}} + \text{۲ولا} - \text{۳لا}^{\text{۲}}} - \sqrt{\text{و}^{\text{۲}} + \text{ولا} - \text{۶لا}^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۲و}^{\text{۲}} + \text{۳ولا} - \text{۹لا}^{\text{۲}}}$

۲۴ـ $\sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۹لا} + \text{۴}} + \text{۳}\sqrt{\text{۲لا} - \text{۱}} = \sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۲۱لا} - \text{۱۱}}$

۲۵ـ $\sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵لا} - \text{۲}} - \sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵لا} - \text{۹}} = \text{۱}$

۲۶ـ $\sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۷لا} + \text{۱}} - \sqrt{\text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۹لا} + \text{۴}} = \text{۱}$

۲۷ - √(۳لا^۲ - ۷لا - ۳۰) - √(۲لا^۲ - ۷لا - ۵) = لا - ۵

۲۸ - لا^۴ + ۸/۹ لا^۲ + ۱ = ۳لا^۳ + ۳لا

۲۹ - لا^۴ + ۱ - ۳(لا^۳ + لا) = ۲لا^۲

۳۰ - ۱۰(لا^۴ + ۱) - ۶۳لا(لا^۲ - ۱) + ۵۲لا^۲ = ۰

۳۱ - ا لا^۳ + ب لا^۲ + ب لا + ا = ۰

۳۲ - ا لا^۳ + ب لا^۲ - ب لا - ا = ۰

۳۳ - ا لا^۴ + ب لا^۳ - ب لا - ا = ۰

۳۴ - ا^۲ لا^۴ + ۲ا ب لا^۳ + ب^۲ لا^۲ - ج^۲ = ۰

۳۵ - ۱۲لا^۵ + لا^۴ + ۱۳لا^۳ - ۱۳لا^۲ - لا - ۱۲ = ۰

۳۶ - (لا + √(لا^۲ - ۱))/(لا - √(لا^۲ - ۱)) + (لا - √(لا^۲ - ۱))/(لا + √(لا^۲ - ۱)) = ۹۸

۳۷ - (لا + √(۱۲ا - لا))/(لا - √(۱۲ا - لا)) = (√ا + ۱)/(√ا - ۱)

۳۸ - (ا + ۲لا + √(ا^۲ - ۴لا^۲))/(ا + ۲لا - √(ا^۲ - ۴لا^۲)) = ۵لا/ا

۳۹ - √(لا^۲ + لا) + √(لا - ۱)/√(لا^۲ - لا) = ۵/۲

۴۰ - (لا^۳ + ۱)/(لا^۲ - ۱) = لا + لا + √(۶/لا)

۴۱ - (ا + لا)^{۲/۳} + ۴(ا - لا)^{۲/۳} = ۵(ا^۲ - لا^۲)^{۱/۳}

۴۲ - √(لا^۲ + ا لا - ۱) - √(لا^۲ + ب لا - ۱) = √ا - √ب

۱۳۳ - اب ہم دو مجہول مقداروں کی ہمزاد مساواتوں پر غور کرینگے۔

مثال ۱ - حل کرو لا + ۲ + ما + ۳ + √((لا + ۲)(ما + ۳)) = ۳۹

(لا+۲)^۲ + (ما+۳)^۲ + (لا+۲)(ما+۳) = ۷۴۱

فرض کرو کہ لا+۲ = و، اور ما+۳ = ھ تب

و + ھ + √(و ھ) = ۳۹ ..................(۱)

و^۲ + ھ^۲ + و ھ = ۷۴۱ ..................(۲)

اس لیے (۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

و + ھ − √(و ھ) = ۱۹ ..................(۳)

(۱) اور (۳) سے و+ھ = ۲۹

اور √(و ھ) = ۱۰ یا و ھ = ۱۰۰

جس سے و = ۲۵ یا ۴، ھ = ۴ یا ۲۵

پس لا = ۲۳ یا ۲، ما = ۱ یا ۲۲

## مثال ۲۔ حل کرو

لا^۴ + ما^۴ = ۸۲ ..................(۱)

لا − ما = ۲ ..................(۲)

فرض کرو لا = و+ھ اور ما = و−ھ

تب مساوات (۲) سے حاصل ہوگا ھ = ۱

ھ کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

(و+۱)^۴ + (و−۱)^۴ = ۸۲

∴ ۲(و^۴ + ۶و^۲ + ۱) = ۸۲

یعنی و^۴ + ۶و^۲ − ۴۰ = ۰

جس سے و^۲ = ۴ یا −۱۰ اور و = ±۲ یا ±√(−۱۰)

پس لا = ۳، −۱، ۱ ± √(−۱۰)

اور ما = ۱، −۳، −۱ ± √(−۱۰)

## مثال ۳۔ حل کرو

(۲لا+ما)/(۲لا−ما) − (لا−ما)/(لا+ما) = ۲ ۸/۱۵ ..........(۱)

۷لا + ۵ما = ۲۹ ..........(۲)

(۱) سے ۱۵(۲لا^۲ + ۳لا ما + ما^۲ − ۲لا^۲ + ۳لا ما − ما^۲) = ۳۸(۲لا^۲ + لا ما − ما^۲)

$\therefore\quad ۱۲۹\,\text{لا}^{۲} - ۲۹\,\text{لا}\,\text{ما} - ۳۸\,\text{ما}^{۲} = ۰$

$\therefore\quad (۳\,\text{لا} - ۲\,\text{ما})(۴۳\,\text{لا} + ۱۹\,\text{ما}) = ۰$

اس لیے $۳\,\text{لا} = ۲\,\text{ما}$ ................................ (۳)

یا $۴۳\,\text{لا} = -۱۹\,\text{ما}$ ................................ (۴)

مساوات (۳) سے $\frac{\text{لا}}{۲} = \frac{\text{ما}}{۳} = \frac{۷\,\text{لا} + ۵\,\text{ما}}{۲۹} = ۱$ بموجب مساوات (۲)

$\therefore\quad \text{لا} = ۲،\ \text{ما} = ۳$

نیز (۴) سے $\frac{\text{لا}}{۱۹} = \frac{\text{ما}}{-۴۳} = \frac{۷\,\text{لا} + ۵\,\text{ما}}{-۸۲} = -\frac{۲۹}{۸۲}$ بموجب مساوات (۲)

$\therefore\quad \text{لا} = -\frac{۵۵۱}{۸۲}،\ \text{ما} = \frac{۱۲۴۷}{۸۲}$

اس لیے $\text{لا} = ۲،\ \text{ما} = ۳$ یا $\text{لا} = -\frac{۵۵۱}{۸۲}،\ \text{ما} = \frac{۱۲۴۷}{۸۲}$

**مثال ۴** - حل کرو $۴\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{ما} + \text{ما}^{۳} = ۸$

$۲\,\text{لا}^{۳} - ۲\,\text{لا}^{۲}\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^{۲} = ۱$

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا}$، ان دو مساواتوں میں ما کی قیمت مندرج کرنے سے

$\text{لا}^{۳}(۴ + ۳\text{م} + \text{م}^{۳}) = ۸$ ................ (۱)

$\text{لا}^{۳}(۲ - ۲\text{م} + \text{م}^{۲}) = ۱$ ................ (۲)

$\therefore\quad \frac{۴ + ۳\text{م} + \text{م}^{۳}}{۲ - ۲\text{م} + \text{م}^{۲}} = ۸$

یعنی $\text{م}^{۳} - ۸\text{م}^{۲} + ۱۹\text{م} - ۱۲ = ۰$

یعنی $(\text{م} - ۱)(\text{م} - ۳)(\text{م} - ۴) = ۰$

اس لیے $\text{م} = ۱$ یا ۳ یا ۴

(ا) فرض کرو کہ $\text{م} = ۱$، مساوات (۱) یا (۲) میں م کی یہ قیمت مندرج کرو

مساوات (۲) سے $\text{لا}^{۳} = ۱$ اس لیے $\text{لا} = ۱$

اور $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} = \text{لا} = ۱$

(ب) فرض کرو کہ م = ۳، مساوات (۲) میں یہ قیمت رکھنے سے

$۵\,\text{لا}^{۳} = ۱$ اس لیے $\text{لا} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}$

اور $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} = ۳\,\text{لا} = ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}$

(ج) فرض کرو کہ $\text{م} = ۴$

تب $۱۰\,\text{لا}^{۳} = ۱$ اس لیے $\text{لا} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۰}}$

اور $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} = ۴\,\text{لا} = ۴\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۰}}$

اس لیے مکمل حل یہ ہے

$\text{لا} = ۱،\ \sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}،\ \sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۰}}$

$\text{ما} = ۱،\ ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}}،\ ۴\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۰}}$

**نوٹ**۔ اگر مساواتیں متجانس اور ایک ہی درجہ کی ہوں تو طریق با لا کی مدد سے حل ہمیشہ بہ آسانی حاصل ہو سکیگا۔

**مثال ۵**۔ حل کرو $۳۱\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - ۷\,\text{ما}^{۴} - ۱۱۲\,\text{لا}\,\text{ما} + ۶۴ = ۰$ ...... (۱)

$\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲} + ۸ = ۰$ ........ (۲)

(۲) سے $-۸ = \text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲}$

اس کو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

$$۳۱\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - ۷\,\text{ما}^{۴} + ۱۴\,\text{لا}\,\text{ما}\,(\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲}) + (\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲})^{۲} = ۰$$

$$\therefore\ ۳۱\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - ۷\,\text{ما}^{۴} + (\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲})(۱۴\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا}\,\text{ما} + ۴\,\text{ما}^{۲}) = ۰$$

$$\therefore\ ۳۱\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - ۷\,\text{ما}^{۴} + (\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{ما}^{۲})^{۲} - (۷\,\text{لا}\,\text{ما})^{۲} = ۰$$

یعنی $\text{لا}^{۴} - ۱۰\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} + ۹\,\text{ما}^{۴} = ۰$ ................ (۳)

$\therefore\ (\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲})(\text{لا}^{۲} - ۹\,\text{ما}^{۲}) = ۰$

اس لیے $\text{لا} = \pm\,\text{ما}$ یا $\text{لا} = \pm\,۳\,\text{ما}$

اِن صورتوں میں سے ہر ایک کو مساوات (۲) میں یکے بعد دیگرے

مندرج کرنے سے

$$\text{لا} = \text{ما} = \pm ۲$$

$$\text{لا} = -\text{ما} = \pm \sqrt{-\tfrac{۲}{۳}}$$

$$\text{لا} = \pm ۳،\ \text{ما} = \pm ۱$$

$$\text{لا} = \pm ۳\sqrt{-\tfrac{۴}{۱۷}}،\ \text{ما} = \mp \sqrt{-\tfrac{۴}{۱۷}}$$

**نوٹ** ۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ مساوات (۳) متجانس ہے اس جگہ ہم نے ایک مساوات کو دوسری مساوات کی مدد سے متجانس بنالیا ہے۔ یہ ترکیب نہایت کار آمد ہے اور ہندسۂ تحلیلی میں کثرت سے استعمال ہوتی ہے۔

**مثال ۶** ۔ حل کرو $(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{۲}{۳}} + ۲(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{۲}{۳}} = ۳(\text{لا}^۲-\text{ما}^۲)^{\frac{۱}{۳}}$ ...(۱)

$$۳\text{لا} - ۲\text{ما} = ۱۳ \quad ....(۲)$$

مساوات (۱) کی ہر ایک رقم کو $(\text{لا}^۲-\text{ما}^۲)^{\frac{۱}{۳}}$ یا $(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{۱}{۳}}(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{۱}{۳}}$ پر تقسیم کریں تو حاصل ہوگا۔

$$\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + ۲\left(\frac{\text{لا}-\text{ما}}{\text{لا}+\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۳$$

یہ مساوات بلحاظ $\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ کے مساوات درجۂ دوم ہے جس سے

حاصل ہوگا $\left(\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲$ یا ۱ جس سے $\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{لا}-\text{ما}} = ۸$ یا ۱

$$\therefore\ ۷\text{لا} = ۹\text{ما} \text{ یا } \text{ما} = ۰$$

ان مساواتوں کو (۲) کے ساتھ ملا کر حل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{لا} = ۹،\ \text{ما} = ۷ \text{ یا } \text{لا} = \tfrac{۱۳}{۳}،\ \text{ما} = ۰$$

# امثلہ نمبری ۱۰ ب

معادلات ذیل کو حل کرو۔

۱۔ ۳لا − ۲ما = ۷
لاما = ۲۰

۲۔ ۵لا − ما = ۳
ما$^{۲}$ − ۶لا$^{۲}$ = ۲۵

۳۔ ۴لا − ۳ما = ۱
۱۲لاما + ۱۳ما$^{۲}$ = ۲۵

۴۔ لا$^{۴}$ + لا$^{۲}$ما$^{۲}$ + ما$^{۴}$ = ۹۳۱
لا$^{۲}$ − لاما + ما$^{۲}$ = ۱۹

۵۔ لا$^{۲}$ + لاما + ما$^{۲}$ = ۸۴
لا − $\sqrt{\text{لاما}}$ + ما = ۶

۶۔ لا + $\sqrt{\text{لاما}}$ + ما = ۶۵
لا$^{۲}$ + لاما + ما$^{۲}$ = ۲۲۷۵

۷۔ لا + ما = ۷ + $\sqrt{\text{لاما}}$
لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ = ۱۳۳ − لاما

۸۔ ۳لا$^{۲}$ − ۵ما$^{۲}$ = ۷
۳لاما − ۴ما$^{۲}$ = ۲

۹۔ ۵ما$^{۲}$ − ۷لا$^{۲}$ = ۱۷
۵لاما − ۶لا$^{۲}$ = ۶

۱۰۔ ۳لا$^{۲}$ + ۱۶۵ = ۱۶لاما
۷لاما + ۳ما$^{۲}$ = ۱۳۲

۱۱۔ ۳لا$^{۲}$ + لاما + ما$^{۲}$ = ۱۵
۳۱لاما − ۳لا$^{۲}$ − ۵ما$^{۲}$ = ۴۵

۱۲۔ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ − ۳ = ۳لاما
۲لا$^{۲}$ − ۶ + ما$^{۲}$ = ۰

۱۳۔ لا$^{۴}$ + ما$^{۴}$ = ۷۰۶
لا + ما = ۸

۱۴۔ لا$^{۴}$ + ما$^{۴}$ = ۲۷۲
لا − ما = ۲

۱۵۔ لا$^{۵}$ − ما$^{۵}$ = ۹۹۲، لا − ما = ۲

۱۶۔ لا + $\frac{۴}{\text{ما}}$ = ۱، ما + $\frac{۴}{\text{لا}}$ = ۲۵

۱۷۔ $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ما}}$ + $\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{لا}}$ = $\frac{۹}{۲}$
$\frac{۳}{\text{لا} + \text{ما}}$ = ۱

۱۸۔ $\frac{\text{لا}}{۲}$ + $\frac{\text{ما}}{۵}$ = ۵
$\frac{۲}{\text{لا}}$ + $\frac{۵}{\text{ما}}$ = $\frac{۵}{۹}$

۱۹۔ لا + ما = ۱۰۷۲
لا$^{\frac{۱}{۳}}$ + ما$^{\frac{۱}{۳}}$ = ۱۶

۲۰۔ لا ما$^{\frac{۱}{۲}}$ + ما لا$^{\frac{۱}{۲}}$ = ۲۰
لا$^{\frac{۳}{۲}}$ + ما$^{\frac{۳}{۲}}$ = ۶۵

۲۱- لا^½ + ما^½ = ۵ ، ۶ (لا^-½ + ما^-½) = ۵

۲۲- √لا + √(لا + ما) + √(لا - ما) = ۴ ، لا² - ما² = ۹

۲۳- √ما + √(لا² - ۱) = ۲ ، √(لا + ۱) - √(لا - ۱) = √ما

۲۴- √(لا/ما) + √(ما/لا) = ۱۰/۳ ، لا + ما = ۱۰

۲۵- (√لا - √ما)/(√لا + √ما) + (√لا + √ما)/(√لا - √ما) = ۱۷/۴ ، لا² + ما² = ۷۰۶

۲۶- لا² + ۴ ما² - ۵ لا ما = ۱۰ (۳ ما - ۸) ، لا ما = ۶

۲۷- لا² ما² + ۴۰۰ = ۴۱ لا ما ، ما² = ۵ لا ما - ۴ لا²

۲۸- ۴ لا² + ۵ ما = ۶ + ۲۰ لا ما - ۲۵ ما² + ۲ لا ، ۷ لا - ۱۱ ما = ۱۷

۲۹- ۹ لا² + ۳۳ لا - ۱۲ = ۱۲ لا ما - ۴ ما² + ۲۲ ما ، لا² - لا ما = ۱۸

۳۰- (لا² - ما²) (لا - ما) = ۱۶ لا ما ، (لا⁴ - ما⁴) (لا² - ما²) = ۶۴۰ لا² ما²

۳۱- ۲ لا² - لا ما + ما² = ۲ ما ، ۲ لا² + ۴ لا ما = ۵ ما

۳۲- (لا³ + ما³)/(لا + ما)² + (لا³ - ما³)/(لا - ما)² = ۴۳ لا/۸ ، ۵ لا - ۷ ما = ۴

۳۳- ما (ما² - ۳ لا ما - لا²) + ۲۴ = ۰ ، لا (ما² - ۴ لا ما + ۲ لا²) + ۸ = ۰

۳۴- ۳ لا² - ۸ لا ما² + ما³ + ۲۱ = ۰ ، لا² (ما - لا) = ۱

۳۵- ما² (۴ لا² - ۱۰۸) = لا (لا³ - ۹ ما³) ، ۲ لا² + ۹ لا ما + ما² = ۱۰۸

۳۶- ۶ لا⁴ + لا² ما² + ۱۶ = ۲ لا (۱۲ لا + ما²) ، لا² + لا ما - ما² = ۴

۳۷- لا (ا + لا) = ما (ب + ما) ، ا لا + ب ما = (لا + ما)²

۳۸- لا ما + ا ب = ۲ ا لا ، لا² ما² + ا² ب² = ۲ ب² ما²

۳۹- (لا - ا)/ا² + (ما - ب)/ب² = ۱/(لا - ب) - ۱/(ما - ا) - ۱/(ا - ب) = ۰

۴۰ - ب لا^۳ = ۱۰ ا^۲ ب لا + ۳ ا^۳ ما، ا ما^۳ = ۱۰ ا ب^۲ ما + ۳ ب^۳ لا

۴۱ - ۲ ا ( لا/ما − ما/لا ) + ۴ ا^۲ = ۴ لا^۲ + لا ما/۲ ا − ما^۲/ا^۲ = ۱

۱۳۴ - جن مساواتوں میں تین یا تین سے زیادہ مقادیر مجہول شامل ہوں وہ صرف خاص صورتوں میں حل ہو سکتی ہیں ہم اس جگہ اُن کے حل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرینگے۔

مثال ۱ - حل کرو لا + ما + ی = ۱۳ ........... (۱)

لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ۶۵ ........... (۲)

لا ما = ۱۰ ........... (۳)

(۲) اور (۳) سے (لا + ما)^۲ + ی^۲ = ۸۵

لا + ما کی جگہ و رکھنے سے یہ مساوات ہو جائیگی۔

و^۲ + ی^۲ = ۸۵ نیز (۱) سے و + ی = ۱۳

جس سے حاصل ہوگا و = ۷ یا ۶ ی = ۶ یا ۷

پس لا + ما = ۷، لا ما = ۱۰ } اور { لا + ما = ۶، لا ما = ۱۰

اس لیے لا = ۵ یا ۲، ما = ۲ یا ۵، ی = ۶ } یا { لا = ۳ ± √−۱، ما = ۳ ∓ √−۱، ی = ۷

مثال ۲ - حل کرو (لا + ما) (لا + ی) = ۳۰

(ما + ی) (ما + لا) = ۱۵

(ی + لا) (ی + ما) = ۱۸

ما + ی، ی + لا، لا + ما کی جگہ بالترتیب و، ھ، ے لکھنے سے

ھ ے = ۳۰، ے و = ۱۵، و ھ = ۱۸ ........... (۱)

ان مساواتوں کو اکٹھا ضرب دینے سے

و^۲ ھ^۲ ے^۲ = ۳۰ × ۱۵ × ۱۸ = ۱۵^۲ × ۶^۲

∴ وھے = ±۹۰

اس نتیجے کو مساواتوں (۱) میں سے ہر ایک کے ساتھ ملانے سے

و = ۳، ھ = ۶، ے = ۵ یا و = -۳، ھ = -۶، ے = -۵

ما + ی = ۳ ، ی + لا = ۶ ، لا + ما = ۵ } یا { ما + ی = -۳ ، ی + لا = -۶ ، لا + ما = -۵

جس سے لا = ۴، ما = ۱، ی = ۲ یا لا = -۴، ما = -۱، ی = -۲

**مثال ۳- حل کرو** ما$^2$ + ما ی + ی$^2$ = ۴۹ ........ (۱)

ی$^2$ + ی لا + لا$^2$ = ۱۹ ........ (۲)

لا$^2$ + لا ما + ما$^2$ = ۳۹ ........ (۳)

(۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

ما$^2$ - لا$^2$ + ی (ما - لا) = ۳۰

یعنی (ما - لا) (لا + ما + ی) = ۳۰ ........ (۴)

اسی طرح (۱) اور (۳) سے

(ی - لا) (لا + ما + ی) = ۱۰ ........ (۵)

اس لیے (۴) اور (۵) سے بذریعۂ عمل تقسیم

(ما - لا) / (ی - لا) = ۳

جس سے ما = ۳ ی - ۲ لا

مساوات (۳) میں ما کی یہ قیمت مندرج کرنے سے

لا$^2$ - ۳ لا ی + ۳ ی$^2$ = ۱۳

مساوات (۲) سے لا$^2$ + لا ی + ی$^2$ = ۱۹

ان متجانس مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

لا = ±۲، ی = ±۳ اور اس لیے ما = ±۵

یا لا = ± ۱۱/√۷، ی = ± ۱/√۷ اور اس لیے ما = ± ۱۹/√۷

**مثال ۴۔** حل کرو $لا^{۲} - مای = ا^{۲}$، $ما^{۲} - ی لا = ب^{۲}$، $ی^{۲} - لاما = ج^{۲}$ ان مساواتوں کو ما، ی، لا سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا،

$$ج^{۲} لا + ا^{۲} ما + ب^{۲} ی = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

ان مساواتوں کو ی، لا، ما سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا،

$$ب^{۲} لا + ج^{۲} ما + ا^{۲} ی = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) سے بذریعہ ضرب چلیپائی

$$\frac{لا}{ا^{۴} - ب^{۲} ج^{۲}} = \frac{ما}{ب^{۴} - ج^{۲} ا^{۲}} = \frac{ی}{ج^{۴} - ا^{۲} ب^{۲}} = ک \ (\text{فرض کرو})$$

دی ہوئی مساواتوں میں سے کسی ایک میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

$$ک^{۲} (ا^{۶} + ب^{۶} + ج^{۶} - ۳ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲}) = ۱$$

$$\therefore \frac{لا}{ا^{۴} - ب^{۲} ج^{۲}} = \frac{ما}{ب^{۴} - ج^{۲} ا^{۲}} = \frac{ی}{ج^{۴} - ا^{۲} ب^{۲}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{ا^{۶} + ب^{۶} + ج^{۶} - ۳ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲}}}$$

## امثلہ نمبری ۱۰ ج

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

۱۔ $۹ لا + ما - ۸ ی = ۰$، $۴ لا - ۸ ما + ۷ ی = ۰$، $مای + ی لا + لاما = ۴۷$

۲۔ $۳ لا + ما - ۲ ی = ۰$، $۴ لا - ما - ۳ ی = ۰$، $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ۴۶۷$

۳۔ $لا - ما - ی = ۲$، $لا^{۲} + ما^{۲} - ی = ۲۲$، $لاما = ۵$

۴۔ $لا + ۲ ما - ی = ۱۱$، $لا^{۲} - ۴ ما^{۲} + ی^{۲} = ۳۷$، $لای = ۲۴$

۵۔ $لا^{۲} + ما^{۲} - ی^{۲} = ۲۱$، $۳ لای + ۳ مای - ۲ لاما = ۱۸$، $لا + ما - ی = ۵$

۶۔ $لا^{۲} + لاما + لای = ۱۸$، $ما^{۲} + مای + مالا + ۱۲ = ۰$، $ی^{۲} + ی لا + ی ما = ۳۰$

۷۔ لا$^{۲}$ + ۲ لاما + ۳ لای = ۵۰ ۸۔ (ما ـ ی) (ی + لا) = ۲۴

۲ ما$^{۲}$ + ۳ مای + مالا = ۱۰ (ی + لا) (لا ـ ما) = ۳۳

۳ ی$^{۲}$ + ی لا + ۲ ی ما = ۱۰ (لا ـ ما) (ما ـ ی) = ۶

۹۔ لا$^{۲}$ ما$^{۲}$ ی$^{۲}$ و = ۱۲، لا$^{۲}$ ما$^{۲}$ ی و$^{۲}$ = ۸، لا$^{۲}$ ما ی$^{۲}$ و$^{۲}$ = ۱، ۳ لا ما$^{۲}$ ی$^{۲}$ و$^{۲}$ = ۴

۱۰۔ لا$^{۳}$ ما$^{۲}$ ی = ۱۲، لا$^{۳}$ ما ی$^{۳}$ = ۵۴، لا ما$^{۳}$ ی$^{۲}$ = ۷۲

۱۱۔ لاما + لا + ما = ۲۳ ۱۲۔ ۲ لاما ـ ۴ لا + ما = ۱۷

لای + لا + ی = ۴۱ ۳ مای + ما ـ ۶ ی = ۵۲

مای + ما + ی = ۲۷ ۶ لای + ۳ ی + ۲ لا = ۲۹

۱۳۔ لای + ما = ۷ ی، مای + لا = ۸ ی، لا + ما + ی = ۱۲

۱۴۔ لا$^{۳}$ + ما$^{۳}$ + ی$^{۳}$ = ا$^{۳}$، لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ا$^{۲}$، لا + ما + ی = ا

۱۵۔ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = مای + ی لا + لاما = ا$^{۲}$، ۳ لا ـ ما + ی = ا $\sqrt{۳}$

۱۶۔ لا$^{۲}$ + ما$^{۲}$ + ی$^{۲}$ = ۲۱ ا$^{۲}$، مای + ی لا ـ لاما = ۶ ا$^{۲}$،

۳ لا + ما ـ ۲ ی = ۳ ا

# باب یازدہم

## ترتیب واجتماع

**۱۳۵**۔ اگر متعدد اشیاء میں سے چند یا سب اشیاء لے کر انہیں مختلف طریقوں سے سلسلہ وار رکھا جایے تو ایسے ہر ایک طریقے کو ترتیب اشیاء کہتے ہیں مثلاً کل ترتیبیں جو حروف ا، ب، ج، د میں سے دو دو حرف اکھٹے لینے سے بن سکتی ہیں ۱۲ ہیں یعنی

اب، اج، اد، بج، بد، جد
با، جا، دا، جب، دب، دج

اِن میں سے ہر ایک دو دو حرف کی ایک مختلف ترتیب ہے۔

اگر انہی چار حرف میں سے تین تین حرف کی مختلف ترتیبیں لگائیں تو وہ تعداد میں ۲۴ ہونگی۔

| | | | |
|---|---|---|---|
| ابج | ابد | اجد | بجد |
| اجب | ادب | ادج | بدج |
| بجا | بدا | جدا | جدب |
| باج | باد | جاد | جبد |
| جاب | داب | داج | دبج |
| جبا | دبا | دجا | دجب |

اگر سب حروف کی اکٹھی ترتیبیں لگائیں تو وہ مفصلۂ ذیل ہونگی۔

| | | | |
|---|---|---|---|
| ا ب ج د | ب ج د ا | ج د ا ب | د ا ب ج |
| ا ب د ج | ب ج ا د | ج د ب ا | د ا ج ب |
| ا ج ب د | ب د ج ا | ج ا د ب | د ب ا ج |
| ا ج د ب | ب د ا ج | ج ا ب د | د ب ج ا |
| ا د ب ج | ب ا ج د | ج ب د ا | د ج ا ب |
| ا د ج ب | ب ا د ج | ج ب ا د | د ج ب ا |

جس سے ظاہر ہے کہ چار حرف کی ۲۴ مختلف ترتیبیں ہیں جن میں سے ہر ایک ترتیب میں چاروں حرف اکھٹے شامل ہوتے ہیں۔

**تعریف**۔ ہر ایک ایسا مجموعہ جو متعدد اشیاء میں سے چند یا سب اشیاء اکھٹا کرنے سے بن سکتا ہے اور جس میں ترتیب اشیاء ملحوظ نہیں رکھی جاتی اجتماعِ اشیاء کہلاتا ہے۔

مثلاً چار حرف ا، ب، ج، د میں سے کل اجتماع جو ایک ایک حرف دو دو حرف، تین تین حرف اور چار چار حرف اکھٹے لینے سے بن سکتے ہیں مفصلۂ ذیل ہیں۔

کل اجتماع ایک ایک حرف لینے سے ا، ب، ج، د تعداد میں ۴ ہیں

کل اجتماع دو دو حرف اکھٹے لینے سے { اب، اج، اد / ب ج، ب د، ج د } " " ۶ ہیں

" " تین تین " " ا ب ج، ا ج د، ا ب د، ب ج د " " ۴ "

" " چار چار " " ا ب ج د " " ۱ ہے

اگر ن اشیاء میں سے ر، ر (رے، رے) اشیاء لے کر ان کی مختلف ترتیبیں لگائی جائیں تو اپنی آیندہ سہولت کے لیے ہم ان مختلف ترتیبوں کی تعداد کو $_nت_ر$ سے تعبیر کرینگے اسی طرح سے اگر ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ایسے اجتماعوں کی تعداد کو ہم $_nج_ر$ سے تعبیر کرینگے۔

اس طریق کتابت کے مطابق نتائج مندرجۂ بالا اختصاراً یوں لکھے جا سکتے ہیں :-

$$ {}_{۴}ت_{۲} = ۱۲ ،\quad {}_{۴}ت_{۳} = ۲۴ ،\quad {}_{۴}ت_{۴} = ۲۴ $$

$$ {}_{۴}ج_{۱} = ۴ ،\quad {}_{۴}ج_{۲} = ۶ ،\quad {}_{۴}ج_{۳} = ۴ $$

نیز ${}_{۴}ج_{۴} = ۱$- چونکہ چار حرف میں سے چار چار حرف کا ایک ہی اجتماع بن سکتا ہے -

ہمیں معلوم ہے کہ ۴ حرف میں سے تین تین حرف کے اجتماع تعداد میں چار ہیں یعنی

ا ب ج ، ا ج د ، ا ب د ، ب ج د

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ مثلاً ا ب ج چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جا سکتا ہے یعنی

ا ب ج　　ب ج ا　　ج ا ب
ا ج ب　　ب ا ج　　ج ب ا

اسی طرح سے ا ج د ، ا ب د ، ب ج د میں سے ہر ایک اجتماع چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جا سکتا ہے - پس معلوم ہوا کہ چار اشیاء میں سے تین تین اشیاء کی ترتیبیں اُن کی تعدادِ اجتماع کی ۶ گنی ہوتی ہیں -

$$ \text{یعنی}\quad {}_{۴}ت_{۳} = ۶ \times {}_{۴}ج_{۳} = ۲۴ $$

ترتیب و اجتماع کی بحث میں عام طور پر اس بات کا یاد رکھنا مفید ہوگا کہ مختلف اجتماع بنانے میں ہمارا تعلق صرف اُس تعداد اشیاء سے ہوتا ہے جو کسی ایک انتخاب میں موجود ہو مگر ترتیب لگانے میں ترتیب اشیاء کا خاص لحاظ رکھنا پڑتا ہے مثلاً ا ب اور ب ا دو مختلف اجتماع نہیں ہیں مگر دو مختلف ترتیبیں ضرور ہیں -

**۱۳۶ -** اس باب کے عام مسئلوں پر بحث کرنے سے پہلے ہم

ایک اہم اصول کی تشریح کرینگے اور اس کی توضیح کے لیے چند عددی مثالیں دینگے۔

اگر ایک کام م طریقوں سے کیا جا سکتا ہے اور (جب یہ کام ان طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے کر دیا جائے تو) ایک دوسرا کام ن طریقوں سے کیا جا سکتا ہے تو یہ دونوں کام م × ن طریقوں سے کیے جا سکتے ہیں۔

اگر پہلا کام م طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے کیا جائے تو ہم اس کے ساتھ دوسرا کام کرنے کے ن طریقوں میں سے کسی ایک کو منسلک کر سکتے ہیں۔ پس یہ دو کام کرنے کے ن طریقوں سے کیے جا سکتے ہیں، اگر ہم پہلا کام کرنے کے صرف ایک طریقہ پر غور کریں۔ اس لیے پہلا کام کرنے کے م طریقوں میں سے ہر ایک کے جواب میں دونوں کام کرنے کے ن طریقے ہیں۔ اس لیے دونوں کام کرنے کے کل طریقوں کی تعداد م × ن ہے۔

مثال ۱۔ دس جہاز بمبئی اور کراچی کے درمیان آتے جاتے ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے ایک مسافر بمبئی سے کراچی جا سکتا ہے اور مختلف جہاز سے واپس آ سکتا ہے۔

پہلے سفر کے ۱۰ طریقے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کے مقابل واپس آنے کے ۹ طریقے ہیں (کیونکہ مسافر جس جہاز سے جائے اُسی سے واپس نہیں آ سکتا)۔

اس لیے آنے جانے کے مختلف طریقے = ۱۰ × ۹ = ۹۰

یہ اصول اُس صورت پر بھی حاوی ہے جہاں دو سے زیادہ عمل ہوں اور اُن میں سے ہر ایک متعدد طریقوں سے ہو سکتا ہو۔

مثال ۲۔ کسی شہر میں ۳ مسافر آئے وہاں چار مسافر خانے تھے اگر اُن میں سے ہر الگ الگ مسافر خانے میں رہے تو معلوم کرو کہ کتنے مختلف طریقوں سے وہ مختلف مسافر خانوں میں قیام کر سکتے ہیں۔

پہلا مسافر چار مسافر خانوں میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے اور جب اُس نے اپنا انتخاب کسی ایک طریقے سے کر لیا تو دوسرا مسافر باقی تین میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے، معلوم ہوا کہ پہلے دو مسافر ۴ × ۳ طریقوں سے اپنی جائے قیام کا انتخاب کر سکتے ہیں اور ان میں سے کسی ایک انتخاب کے ساتھ تیسرا مسافر دو طرح سے اپنا مسافر خانہ منتخب کر سکتا ہے اس لیے مطلوبہ طریقے = ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴

**۱۳۷**۔ اگر ن مختلف اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی ترتیبیں لگائی جائیں تو اُن کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیاء کو ن حروف ا، ب، ج وغیرہ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ر خالی مقامات ہیں اور ان میں سے ہر ایک مقام کو ایک حرف سے پُر کرنا ہے۔

پہلا مقام ن طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے کیونکہ ہم ن مختلف حروف میں سے کوئی سا ایک منتخب کر سکتے ہیں اور وہ پہلے مقام میں رکھا جا سکتا ہے۔ جب یہ کسی ایک طریقے سے پُر ہو گیا تو دوسرا مقام ن ۔ ۱ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور چونکہ پہلے مقام کے پُر کرنے کا طریقہ دوسرے مقام کے پُر کرنے کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے اس لیے پہلے دو مقام پُر کرنے کے کُل طریقے ن (ن ۔ ۱) ہیں۔ جب پہلے دو مقام پُر ہو گئے تو تیسرا مقام ن ۔ ۲ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور پہلے تین مقام پُر کرنے کے کُل طریقے ن (ن ۔ ۱) (ن ۔ ۲) ہیں۔

اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک نئے مقام کے پُر ہونے پر حاصل ضرب میں ایک نیا جزوِ ضربی داخل ہوتا ہے اور کسی خاص منزل پر اجزائے ضربی کی تعداد وہی ہے جو پُر کردہ مقامات کی ہے۔ اس سے ثابت ہوا کہ ر مقامات

پُر کرنے کے کُل طریقے یعنی

$_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ = ن (ن-۱) (ن-۲) ...... ر اجزائے ضربی تک

اور ر واں جزو ضربی = ن - (ر-۱) = ن - ر + ۱

اِس لیے ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد یعنی

$_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ = ن (ن-۱) (ن-۲) ..... (ن - ر + ۱)

نتیجۂ صریح - اگر ن اشیاء میں سے سب اشیاء کی اکٹھی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان ترتیبوں کی تعداد = ن (ن-۱) (ن-۲) ....... ن اجزائے ضربی تک -

= ن (ن-۱) (ن-۲) ......۳×۲×۱

اِس حاصلِ ضرب کو (یعنی ایک سے لے کر ن تک تمام اعداد صحیح کے حاصلِ ضرب کو) |ن یا ن! سے تعبیر کرتے ہیں اِسے ہم **"حاصل ضربی ن"** یا اختصاراً **"ضربی ن"** کہینگے پس معلوم ہوا کہ

$_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ن}}$ = ن (ن-۱) (ن-۲) ..... ۲×۱ = |ن یا ن!

**نوٹ** - عددی مثالیں حل کرنے میں اس بات کا خیال رکھنا مفید ہوگا کہ علامت $_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ میں حرف آخر (یعنی ر) سے حاصل ضرب کے اجزائے ضربی کی تعداد کی تعبیر ہوتی ہے -

**۱۳۸**- ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد طریقِ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے -

فرض کرو کہ ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی کل ترتیبیں $_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر}}$ سے تعبیر ہوتی ہیں -

فرض کرو کہ ہم ن اشیاء میں سے ر-۱، ر-۱ اشیاء کی کل ترتیبیں لگاتے ہیں ان کی تعداد $_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ر-۱}}$ ہوگی -

اب ان میں سے ہر ایک ترتیب کے دائیں سرے پر باقی ن - ر + ۱ اشیاء میں سے ایک ایک شے کو باری باری رکھو ہر دفعہ ایسا کرنے سے

ہمیں ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی ایک ترتیب حاصل ہوگی اور اس لیے ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی کل ترتیبیں ${}_{ن}ت_{ر-۱} \times (ن - ر + ۱)$ ہونگی -

یعنی $${}_{ن}ت_{ر} = {}_{ن}ت_{ر-۱} \times (ن - ر + ۱)$$

ر کی جگہ ر - ۱ لکھنے سے

$${}_{ن}ت_{ر-۱} = {}_{ن}ت_{ر-۲} \times (ن - ر + ۲)$$

اسی طرح سے $${}_{ن}ت_{ر-۲} = {}_{ن}ت_{ر-۳} \times (ن - ر + ۳)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$${}_{ن}ت_{۳} = {}_{ن}ت_{۲} \times (ن - ۲)$$
$${}_{ن}ت_{۲} = {}_{ن}ت_{۱} \times (ن - ۱)$$
$${}_{ن}ت_{۱} = ن$$

ستونوں کو اکھٹا ضرب دیں اور متماثل ارقام کو طرفین سے خارج کریں تو حاصل ہوگا،

$${}_{ن}ت_{ر} = ن\,(ن - ۱)\,(ن - ۲) \ldots\ldots (ن - ر + ۱)$$

**نتیجہ صریح** - $${}_{ن}ت_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ر}$$

کیونکہ $${}_{ن}ت_{ر} = ن\,(ن - ۱)\,(ن - ۲) \ldots\ldots (ن - ر + ۱)$$

$$= \frac{ن\,(ن - ۱) \ldots\ldots (ن - ر + ۱)\,(ن - ر) \ldots\ldots ۱ \times ۲ \times ۳}{۱ \times ۲ \ldots\ldots (ن - ر)}$$

$$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ر}$$

**مثال ۱** - چار اشخاص ایک ریل کے ڈبہ میں، جس میں ۶ نشستیں ہیں، داخل ہوتے ہیں۔ بتاؤ کہ وہ کتنے طریقوں سے بیٹھ سکتے ہیں۔

پہلا شخص ۶ طریقوں سے بیٹھ سکتا ہے، دوسرا ۵ طریقوں سے، تیسرا ۴ طریقوں سے اور چوتھا ۳ طریقوں سے۔ اس لیے ان چار اشخاص کے بیٹھنے کے طریقوں کی تعداد

۳۶۰ = ۳ × ۴ × ۵ × ۶ =

**مثال ۲۔** نو ہندسے ۱، ۲، ۳، ...... ۹ ہیں ان میں سے چھ چھ ہندسے لینے سے کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں؟

یہاں نو مختلف اشیاء ہیں ان میں سے چھ چھ کی مختلف ترتیبیں معلوم کرنی ہیں اس لیے اعداد مطلوبہ کی تعداد = $\text{ت}^{۹}_{۶}$

۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۸ × ۹ =

۶۰۴۸۰ =

**مثال ۳۔** کل ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں اور ۷ گھنٹے سب کے سب اکھٹے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں؟

چونکہ مختلف گھنٹوں کے بجنے سے مختلف آوازیں پیدا ہوتی ہیں اس لیے اگر انہیں مختلف ترتیبوں سے بجایا جائے تو ہر دفعہ ایک مختلف اور نئی مرکب آواز پیدا ہوگی۔

پس ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹوں کے بجنے کے مختلف طریقوں کی تعداد = $\text{ت}^{۷}_{۴}$ = ۸۴۰ = ۴ × ۵ × ۶ × ۷

اور ۷ گھنٹوں کے اکھٹے بجنے کے کل طریقے = $\text{ت}^{۷}_{۷}$

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ =

۵۰۴۰ =

**مثال ۴۔** چھ ہندسوں ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ میں سے کل کتنے اعداد بن سکتے ہیں جو ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوں اور ۵ پر تقسیم ہو سکیں۔

چونکہ ہر ایک عدد ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے

اِس لیے ظاہر ہے کہ اس کی بائیں جانب عدد ۳ ہے اور اس میں ۴ ہندسے شامل ہیں نیز چونکہ وہ ۵ پر پورا القسیم ہوتا ہے اس لیے اکائی کی جگہ ۵ ہونا چاہیے (کیونکہ دیے ہوئے ہندسوں میں صفر نہیں ہے)۔

پس معلوم ہوا کہ اعداد مجوزہ ایسے ہیں کہ ان میں اول اور آخر کے ہندسے معین ہیں صرف دو درمیانی مقامات کو ہندسوں ۴، ۶، ۷، ۸ سے پُر کرنا ہے اور ایسا کرنے کے کل طریقے = ۴ت۲ = ۱۲

مثال ۵۔ لفظ "متصاعدہ" کے حروف سے اور کتنے الفاظ بن سکتے ہیں؟

یہاں کل ۷ حرف ہیں یعنی م، ت، ص، ا، ع، د، ہ

اب چونکہ حروف کی مختلف ترتیبوں سے مختلف الفاظ پیدا ہوتے ہیں اس لیے مندرجۂ بالا حروف سے جو الفاظ بن سکتے ہیں اُن کی تعداد

= ۷ت۷ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷

= ۵۰۴۰

اس لیے تعدادِ مطلوبہ = ۵۰۴۰ - ۱ = ۵۰۳۹

اب فرض کرو کہ ایسے حروف کی تعداد مطلوب ہے جن کے شروع میں ہمیشہ م ہوتا ہے اور آخر میں ہ۔

اس صورت میں م اور ہ کو اپنی اپنی جگہ قائم کرو اور باقی ۵ درمیانی حروف کو آپس میں ترتیب دو پس الفاظ کی تعدادِ مطلوبہ

= ۵ت۵ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ = ۱۲۰

مثال ۶۔ کتنے مختلف طریقوں سے، حرف ا، ب، ج، د، ع، ف، گ آپس میں اِس طرح پر ترتیب دیے جا سکتے ہیں کہ (۱) ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہیں (۲) ب اور ج کبھی اکٹھے نہ ہوں۔

(۱) چونکہ ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہینگے اس لیے ہم انہیں خطوط وحدانی کے اندر داخل کرتے ہیں جیسے (ب ج) اور چھ اشیاء ا، (ب ج)، د، ع، ف، گ کی مختلف ترتیبیں دریافت کرتے ہیں۔

ایسی ترتیبوں کی تعداد = ⌊۶

= ۶×۵×۴×۳×۲×۱ = ۷۲۰

اِن میں سے ہر ایک ترتیب میں حروف ب اور ج ترتیب ب ج میں پائے جاتے ہیں۔

اسی طرح سے ۷۲۰ ترتیبیں ایسی ہیں جن میں حروف مذکورہ کی ترتیب ج ب ہے پس معلوم ہوا کہ کل ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج ہمیشہ متصل ہیں ۲ × ۷۲۰ یا ۱۴۴۰ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ اُن ترتیبوں کی جن میں حروف ب اور ج اکھٹے نہیں ہیں لا ہے اور اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں وہ اکھٹے ہیں ما ہے۔

تب صریحاً لا + ما = ⌊۷

اور بموجب حصہ (۱)، ما = ۲ ⌊۶

اس لیے لا = ⌊۷ − ۲ ⌊۶

= ۷ ⌊۶ − ۲ ⌊۶

= (۷ − ۲) ⌊۶

= ۵ × ۷۲۰

= ۳۶۰۰

اس لیے اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج اکھٹے نہیں ہوتے ۳۶۰۰ ہے۔

**۱۳۹**۔ اُن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ن ج ر سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب اِن میں سے ہر ایک اجتماع ایسی ر مختلف اشیاء کا مجموعہ ہے جو آپس میں ⌊ر طریقوں سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔

اس لیے ن ج ر × ار = ن اشیاء میں سے ر ر اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد

یعنی ن ج ر × ار = ن ت ر

= ن (ن - ۱) (ن - ۲) ........ (ن - ر + ۱)

$$\text{اس لیے ن ج ر} = \frac{\text{ن (ن - ۱) (ن - ۲) ...... (ن - ر + ۱)}}{\text{ار}}$$

نتیجۂ صریح ۔ ن ج ر کا ضابطہ ایک مختلف صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کیونکہ اگر ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو ان-ر سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{ن (ن - ۱) (ن - ۲) .... (ن - ر + ۱) ان-ر}}{\text{ار ان-ر}}$$

شمار کنندہ میں اب ایک سے لیکر ن تک کے کل طبعی اعداد شامل ہیں اس لیے

$$\text{ن ج ر} = \frac{\text{ان}}{\text{ار ان-ر}} \quad ..................(۲)$$

بہتر ہوگا کہ طالب علم ن ج ر کی قیمت کی دونوں صورتیں (۱) اور (۲) یاد رکھے اور نتیجہ (۱) کو اُس وقت استعمال کرے جب عددی جواب مطلوب ہو اور (۲) کو اُس وقت استعمال کرے جب سوال کو صرف صورتِ جبریہ میں ختم کرنا کافی ہو۔

نوٹ ۔ اگر نتیجہ (۲) میں فرض کیا جائے کہ ر = ن تو

$$\text{ن ج ن} = \frac{\text{ان}}{\text{ان ا٠}} = \frac{۱}{\text{ا٠}}$$

لیکن ن ج ن = ۱ اس لیے اگر نتیجہ اُس صورت میں صحیح ہو جب کہ ر = ن تو علامت ا٠ کو ایک کے مساوی خیال کرنا چاہیے۔

مثال ۱ ۔ اگر ن + ۲ اشیاء میں سے تین تین اشیاء کے اجتماعوں کی

تعداد $\frac{۲ن}{۳}$ اشیاء میں سے دو دو اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کی ۱۱ گنی ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ}\quad {}_{ن+۲}ج_{۳} = \frac{(ن+۲)(ن+۱)ن}{۳\times۲\times۱}$$

$$\text{اور}\quad {}_{\frac{۲ن}{۳}}ج_{۲} = \frac{\frac{۲ن}{۳}\left(\frac{۲ن}{۳}-۱\right)}{۲\times۱}$$

اس لیے بموجب شرائط سوال

$$\frac{(ن+۲)(ن+۱)ن}{۳\times۲\times۱} = ۱۱\times\frac{۲ن(۲ن-۳)}{۹\times۲\times۱}$$

$$\text{یا}\quad ۳(ن+۲)(ن+۱) = ۲۲(۲ن-۳)$$

$$\text{یا}\quad ۳ن^{۲}-۳۵ن+۷۲=۰$$

$$\text{یا}\quad (ن-۹)(۳ن-۸)=۰$$

$$\text{اس لیے}\quad ن=۹$$

چونکہ تعدادِ اشیاء مکسور نہیں ہو سکتی اس لیے ن کی دوسری قیمت ناقابلِ قبول ہے۔

**مثال ۲۔** ثابت کرو کہ ${}_{۴ن}ج_{۲ن} : {}_{۲ن}ج_{ن}$

$$=\left\{۱\times۳\times۵\ldots\ldots(۴ن-۱)\right\} : \left\{۱\times۳\times۵\ldots\ldots(۲ن-۱)\right\}^{۲}$$

$$\text{چونکہ}\quad {}_{۴ن}ج_{۲ن} = \frac{\underline{|۴ن}}{\underline{|۲ن}\ \underline{|۲ن}}\quad \text{اور}\quad {}_{۲ن}ج_{ن} = \frac{\underline{|۲ن}}{\underline{|ن}\ \underline{|ن}}$$

$$\text{اس لیے نسبت مطلوبہ} = \frac{\underline{|۴ن}}{\underline{|۲ن}\ \underline{|۲ن}}\times\frac{\underline{|ن}\ \underline{|ن}}{\underline{|۲ن}}$$

$$=\frac{\underline{|۴ن}}{\underline{|۲ن}}\times\left\{\frac{\underline{|ن}}{\underline{|۲ن}}\right\}^{۲}$$

$$\text{اب } \underline{|۴ن} = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \ldots\ldots ۴ن$$

$$= \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۴ن - ۱)\} \times \{۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots ۴ن\}$$

$$= \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۴ن - ۱)\} \times ۲^{۲ن} \{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots ۲ن\}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\underline{|۴ن}}{\underline{|۲ن}} = \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۴ن - ۱)\} \times ۲^{۲ن} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{نیز } \underline{|۲ن} = \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۲ن - ۱)\} \times \{۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots ۲ن\}$$

$$= \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۲ن - ۱)\} \times ۲^{ن} \{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots ن\}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\underline{|۲ن}}{\underline{|ن}} = \{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۲ن - ۱)\}\, ۲^{ن}$$

$$\text{اور اس لیے } \left\{\frac{\underline{|ن}}{\underline{|۲ن}}\right\}^{۲} = \frac{۱}{\{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots (۲ن - ۱)\}^{۲} \times ۲^{۲ن}}$$

$$\text{اس لیے (۱) اور (۲) سے نسبت مطلوبہ} = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots\ldots (۴ن - ۱)}{\{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots (۲ن - ۱)\}^{۲}}$$

**۱۴۰۔** ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی جو انہی اشیاء میں سے ن ۔ ر، ن ۔ ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے کل ممکن اجتماع بنانے میں جب ہم ر اشیاء کا کوئی ایک مجموعہ منتخب کرتے ہیں تو اس کے مقابل ن ۔ ر اشیاء کا ایک مجموعہ باقی رہتا ہے یعنی ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہے جو ن اشیاء میں سے ن ۔ ر، ن ۔ ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

$$\therefore \; {}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ن-ر}$$

اس مسئلہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

$${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}} = \frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}-\text{ر}}\;\; |\underline{\text{ن}-(\text{ن}-\text{ر})}}$$ [دفعہ ۱۳۹]

$$= \frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}-\text{ر}}\;\; |\underline{\text{ر}}} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$$

ایسے اجتماعوں کو متمم اجتماع کہتے ہیں۔

نوٹ (۱) چونکہ ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\cdot} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}-\cdot}$ $\therefore {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}} = ۱$

(۲) نتیجہ ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}$ جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے حسابی عمل کے مختصر کر دینے میں نہایت کارآمد ہے۔

**مثال ۱** — ${}_{۱۲}\text{ج}_{۸}$، ${}_{۲۵}\text{ج}_{۲۲}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

$${}_{۱۲}\text{ج}_{۸} = {}_{۱۲}\text{ج}_{۱۲-۸} = {}_{۱۲}\text{ج}_{۴} = \frac{۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲}{۴\times۳\times۲\times۱}$$
$$= ۱۱\times۵\times۹ = ۴۹۵$$

$${}_{۲۵}\text{ج}_{۲۲} = {}_{۲۵}\text{ج}_{۲۵-۲۲} = {}_{۲۵}\text{ج}_{۳} = \frac{۲۳\times۲۴\times۲۵}{۳\times۲\times۱}$$
$$= ۲۳۰۰$$

**مثال ۲** — اگر ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱۴} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱۶}$ تو ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲۸}$ اور ${}_{۳۲}\text{ج}_{\text{ن}}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱۴} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱۶}$ $\therefore \text{ن} = ۱۴ + ۱۶ = ۳۰$

اس لیے ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲۸} = {}_{۳۰}\text{ج}_{۲۸} = {}_{۳۰}\text{ج}_{۲} = \frac{۲۹\times۳۰}{۲\times۱} = ۴۳۵$

اور ${}_{۳۲}\text{ج}_{\text{ن}} = {}_{۳۲}\text{ج}_{۳۰} = {}_{۳۲}\text{ج}_{۲} = \frac{۳۱\times۳۲}{۲\times۱} = ۴۹۶$

**مثال ۳** — اگر ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} = {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}+۱}$ اور اگر ان میں سے ہر ایک کی

نسبت ${}_{ن}ج_{ر-۱}$ سے ۵ : ۴ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ ${}_{ن}ج_{ر+۱} = {}_{ن}ج_{ر}$

اس لیے ر + ۱ = ن - ر ........................ (۱)

اب چونکہ $${}_{ن}ج_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}} = \frac{|\underline{ن}}{ر\ |\underline{ر-۱}\ |\underline{ن-ر}}$$

اور $${}_{ن}ج_{ر-۱} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر-۱}\ |\underline{ن-ر+۱}} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر-۱}\ (ن-ر+۱)\ |\underline{ن-ر}}$$

اس لیے بموجب شرائط سوال

$$\frac{۵}{۴} = {}_{ن}ج_{ر} : {}_{ن}ج_{ر-۱} = \frac{ن-ر+۱}{ر}$$

$$= \frac{ر+۲}{ر}$$ بموجب (۱)

جس سے ر = ۸ اور اس لیے ن = ۲ر + ۱ = ۱۷

**۱۴۱** - جب ن اشیاء میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع مطلوب ہوں جن میں سے ہر ایک اجتماع میں ایک خاص شئے شامل ہو تو ہمیں اُس شئے کو علیحدہ نکال کر باقی ماندہ ن - ۱ اشیا میں سے ر - ۱، ر - ۱ اشیا کے مختلف اجتماع بنانے چاہییں اور پھر ہر ایک ایسے اجتماع میں اُس خاص شئے کو شامل کر دینا چاہیے۔

پس معلوم ہوا کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں سے ہر ایک میں ایک خاص شئے ہمیشہ شامل ہوتی ہے

$$= {}_{ن-۱}ج_{ر-۱}$$

**مثال ۱** - ایک تاش کی بازی لگانے کے لیے ۱۰ مردوں میں سے چھ چھ کی مختلف جماعتیں مطلوب ہیں معلوم کرو کہ یہ عمل کتنی طرح سے

ہو سکتا ہے۔

تعداد مطلوبہ $= {}_{10}ج_{6} = {}_{10}ج_{4} = \frac{7\times 8\times 9\times 10}{4\times 3\times 2\times 1} = 210$

اس تعداد میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل ہوگا؟

اُسے علیحدہ کرو باقی ۹ مردوں میں سے پانچ پانچ کی مختلف جماعتیں بناؤ اور پھر اخیر میں اس کو ہر ایک جماعت میں شامل کر دو۔

ایسی جماعتوں کی تعداد $= {}_{9}ج_{5} = {}_{9}ج_{4}$

$$= \frac{6\times 7\times 8\times 9}{4\times 3\times 2\times 1} = 126$$

ان میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل نہیں ہوگا؟

اُسے علیحدہ کرو اور باقی ۹ میں سے چھ چھ کی جماعتیں بناؤ

تعداد مطلوبہ $= {}_{9}ج_{6} = {}_{9}ج_{3} = \frac{7\times 8\times 9}{3\times 2\times 1} = 84$

**مثال ۲** — کل ۱۲ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں کتنی طرح سے منتخب ہو سکتی ہیں جبکہ ہر ایک صورت میں (۱) ایک خاص کتاب ہمیشہ شامل کی جائے (۲) ایک خاص کتاب ہمیشہ خارج کی جائے۔

(۱) چونکہ ہر ایک انتخاب میں کتاب مختص شامل ہوگی اس لیے ہمیں گیارہ کتابوں میں سے صرف چار چار کتابیں منتخب کرنی ہیں۔

اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= {}_{11}ج_{4} = \frac{8\times 9\times 10\times 11}{4\times 3\times 2\times 1} = 330$

(۲) چونکہ کتاب مختص ہمیشہ خارج کی جائیگی اس لیے ہمیں ۱۱ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں منتخب کرنی ہیں اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$= {}_{11}ج_{5} = \frac{7\times 8\times 9\times 10\times 11}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 462$$

۱۴۲ —— امثلۂ ذیل میں یہ بات قابل توجہ ہے کہ ترتیب لگانے کے قاعدہ کو استعمال نہیں کرنا چاہیے جب تک کہ مناسب اجتماع بموجب شرائط سوال مرتب نہ ہو جائیں ۔

**مثال ۱** — ۸ ہندوستانیوں اور ۵ انگریزوں میں سے ۷ کی ایک کمیٹی بنانی ہے معلوم کرو کہ یہ کتنے مختلف طریقوں سے ہوسکتا ہے جبکہ کمیٹی میں (۱) صرف ۲ انگریز ہوں (۲) کم از کم دو انگریز ہوں ۔

(۱) کمیٹی میں دو انگریز اور اس لیے ۵ ہندوستانی ہونگے ۔
اب ۸ ہندوستانیوں میں سے ۵ ہندوستانی منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

$$= \text{۸ج۵} = \text{۸ج۳}$$

اور ۵ انگریزوں میں سے ۲ انگریز منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

$$= \text{۵ج۲}$$

چونکہ کمیٹی بنانے میں ہر ایک ہندوستانی گروہ ہر ایک انگریزی گروہ سے منسلک ہوسکتا ہے اس لیے کمیٹی بنانے کے کل طریقے

$$= \text{۸ج۳} \times \text{۵ج۲}$$

$$= \frac{۶\times۷\times۸}{۳\times۲\times۱} \times \frac{۴\times۵}{۲\times۱}$$

$$= ۵۶ \times ۱۰ = ۵۶۰$$

(۲) کمیٹی میں ۲، ۳، ۴، ۵ انگریز ہوسکتے ہیں اس لیے ہمیں چار مختلف صورتوں پر غور کرنا چاہیے :۔

صورت اول ۔ کمیٹی میں ۲ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں ۔
صورت دوم ۔ " ۳ انگریز اور ۴ ہندوستانی ہیں ۔
صورت سوم ۔ " ۴ انگریز اور ۳ ہندوستانی ہیں ۔
صورت چہارم ۔ " ۵ انگریز اور ۲ ہندوستانی ہیں ۔

اب بموجب حصہ (۱) پہلی صورت میں کمیٹی بنانے کے مختلف طریقے

$= {}_{۵}ج_{۲} \times {}_{۸}ج_{۵}$ ، دوسری صورت میں $= {}_{۵}ج_{۳} \times {}_{۸}ج_{۴}$ ، تیسری صورت میں $= {}_{۵}ج_{۴} \times {}_{۸}ج_{۳}$ اور چوتھی صورت میں $= {}_{۵}ج_{۵} \times {}_{۸}ج_{۲}$

اس لیے تعداد مطلوبہ $= ({}_{۵}ج_{۲} \times {}_{۸}ج_{۵}) + ({}_{۵}ج_{۳} \times {}_{۸}ج_{۴})$

$+ ({}_{۵}ج_{۴} \times {}_{۸}ج_{۳}) + ({}_{۵}ج_{۵} \times {}_{۸}ج_{۲})$

$= ({}_{۵}ج_{۲} \times {}_{۸}ج_{۳}) + ({}_{۵}ج_{۲} \times {}_{۸}ج_{۴}) + ({}_{۵}ج_{۱} \times {}_{۸}ج_{۳}) + ۱ \times {}_{۸}ج_{۲}$

$$= \left(\frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \times \frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱}\right) + \left(\frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \times \frac{۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}\right)$$

$$+ \left(۵ \times \frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱}\right) + \left(\frac{۷ \times ۸}{۲ \times ۱}\right).$$

$$= ۵۶۰ + ۷۰۰ + ۲۸۰ + ۲۸$$

$$= ۱۵۶۸$$

**مثال ۲** — ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں اُن میں سے ۳ صرف ایک طرف چپو چلا سکتے ہیں اور ۲ صرف دوسری طرف ، معلوم کرو کہ کشتی میں ان کی نشستیں کتنی طرح سے ترتیب دی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ملاح ا ، ب ، ج ، د ، ع ، ف ، گ ، ہ ہیں نیز فرض کرو کہ ا ، ب ، ج ہمیشہ ایک طرف اور د ، ع ہمیشہ دوسری طرف رہتے ہیں جیسا کہ ترتیب ذیل سے ظاہر ہے۔

ا

ب     د

ج     ع

اب ضروری ہے کہ دونوں طرف چار چار ملاح ہوں باقی تین میں سے ایک کو ا ، ب ، ج کی طرف بٹھانا چاہیے اور دوسرے دو کو د اور ع کی طرف۔

ظاہر ہے کہ یہ عمل تین طرح سے ہوسکتا ہے کیونکہ ہم کسی ایک کو
ا، ب، ج کی طرف بٹھا سکتے ہیں۔

ان تینوں طریقوں میں سے فی الحال ایک پر غور کرو یعنی جب ف کو
ا، ب، ج کی طرف بٹھایا جائے دیکھو ترتیب ذیل

| | |
|---|---|
| ا | د |
| ب | ع |
| ج | گ |
| ف | ہ |

اب ا، ب، ج، ف آپس میں |۴ طرح سے ترتیب دیے جاسکتے
ہیں اور صریحاً ان میں سے ہر ایک ترتیب کے مقابل د، ع، گ، ہ
کو آپس میں ترتیب دینے کے |۴ طریقے ہیں اس لیے اس
صورت میں ملاحوں کو ترتیب دینے کے کل طریقوں کی تعداد
= |۴ × |۴

اسی طرح سے دوسری دو صورتوں میں سے ہر ایک کے مقابل
ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے |۴ × |۴ طریقے ہیں۔
اس لیے ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے

= ۳ × |۴ × |۴

= ۳ × ۲۴ × ۲۴

= ۱۷۲۸

**مثال ۳** — ۱۰ حرف صحیح اور ۴ حرف علت میں سے کتنے
ایسے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حرف صحیح اور ۲ حرف
علت شامل ہوں۔

۱۰ حرف صحیح میں سے تین تین حرف کے اجتماعوں کی تعداد = ۱۰ج۳
۴ حرف علت میں سے دو دو حرف کے اجتماعوں کی تعداد = ۴ج۲
اب پہلی قسم کے ہر ایک مجموعہ کو دوسری قسم کے ہر ایک مجموعہ کے

ساتھ اکٹھا کرنے سے ہمیں $ج_۳ \times {}_۴ج_۲$ اجتماع حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حرف صحیح اور ۲ حرف علت شامل ہیں ۔

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ میں ۵ مختلف حروف ہیں جو آپس میں $\lfloor ۵$ طرح سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں ۔

اس لیے الفاظ کی تعداد مطلوبہ = $ج_۳ \times {}_۴ج_۲ \times \lfloor ۵$

$$= \frac{۸ \times ۹ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۳ \times ۴}{۲ \times ۱} \times \lfloor ۵$$

$$= ۱۲۰ \times ۶ \times \lfloor ۵$$

$$= ۷۲۰ \times ۱۲۰$$

$$= ۸۶۴۰۰$$

**مثال ۴** ۔۔۔ اگر ن اشیاء میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو معلوم کرو کہ کتنی ترتیبوں میں تین اشیائے معینہ شامل ہونگی ۔

سب سے پہلے ہم ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے ایسے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرینگے جن میں سے ہر ایک اجتماع میں تینوں اشیائے معینہ شامل ہوں ۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک ایسا اجتماع بنائیں جس میں تینوں اشیائے مذکورہ شامل ہوں تو اس میں اور ر ۔ ۳ اشیا بھی موجود ہونگی جو باقی ماندہ ن ۔ ۳ اشیا میں سے منتخب کی گئی ہیں ۔ پس معلوم ہوا کہ ر اشیاء کے ایسے اجتماع جن میں تینوں اشیا موجود ہوں اتنے ہونگے جتنے کہ ن ۔ ۳ اشیا میں سے ر ۔ ۳، ر ۔ ۳ اشیا کے اجتماع ہیں ۔

یعنی اجتماعوں کی تعداد مطلوبہ = $_{ن-۳}ج_{ر-۳} = \dfrac{\lfloor ن - ۳}{\lfloor ر - ۳ \; \lfloor ن - ر}$

لیکن ان میں سے ر، ر اشیا کا ہر ایک مجموعہ آپس میں $\lfloor ر$ طرح سے

ترتیب دیا جا سکتا ہے پس کل ترتیبوں کی تعداد جن میں تینوں اشیائے معینہ شامل ہیں۔

$$= \frac{\underline{|\text{ن} - ۳}}{\underline{|\text{ر} - ۳}\ \ \underline{|\text{ن} - \text{ر}}} \times \underline{|\text{ر}}$$

$$= \frac{\underline{|\text{ن} - ۳}}{\underline{|\text{ن} - \text{ر}}} \times \text{ر}(\text{ر} - ۱)(\text{ر} - ۲)$$

۱۴۳ — اگر ن اشیاء کے مختلف پارسل بنانے مطلوب ہوں تو اس سوال کا حل ضابطہ متعلقہ ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا کے ایسے دو پارسل بنانے مطلوب ہیں جن میں سے پہلے میں ر اشیا اور دوسرے میں باقی ن - ر اشیا شامل ہوتی ہیں۔

پہلے پارسل کی ر اشیا منتخب کرنے کے کل طریقے ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہیں اور ظاہر ہے کہ جب ہم ر اشیا کا ایک اجتماع بناتے ہیں تو ن - ر اشیا کا ایک اجتماع باقی رہتا ہے اور وہ دوسرے پارسل کی تعداد اشیا ہے پس معلوم ہوا کہ دونوں پارسل بنانے کے کل طریقوں کی تعداد وہی ہے جو پہلے پارسل کی ر اشیا منتخب کرنے کی تعداد ہے۔

اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن} - \text{ر}}}$

اگر ل + م اشیا کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا مطلوب ہو یا اُن کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں بالترتیب ل اور م اشیا شامل ہوں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $= \frac{\underline{|\text{ل} + \text{م}}}{\underline{|\text{ل}}\ \underline{|\text{م}}}$ ............ (۱)

اگر ل + م + ن اشیا میں سے تین ایسے اجتماع یا پارسل بنانے مطلوب ہوں جن میں بالترتیب ل، م، ن اشیا شامل ہوں تو سب سے

اول ہم انھیں ایسے دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں بالترتیب ل اور م + ن اشیا شامل ہوں (۱) سے ظاہر ہے کہ ایسا کرنے سے کل طریقوں کی تعداد $\dfrac{|\underline{ل+م+ن}}{|\underline{ل}\;|\underline{م+ن}}$ ہے، اسی طرح سے م+ن اشیا کے دو پارسل جن میں جداگانہ م اور ن اشیا شامل ہوں $\dfrac{|\underline{م+ن}}{|\underline{م}\;|\underline{ن}}$ طرح سے بن سکتے ہیں اس لیے ل + ن اشیا میں سے بالترتیب ل، م، ن اشیا کے تین پارسل بنانے کے کل طریقے

$$= \dfrac{|\underline{ل+م+ن}}{|\underline{ل}\;|\underline{م+ن}} \times \dfrac{|\underline{م+ن}}{|\underline{م}\;|\underline{ن}}$$

$$= \dfrac{|\underline{ل+م+ن}}{|\underline{ل}\;|\underline{م}\;|\underline{ن}}$$

ل + م اشیا کے دو پارسل بنانے میں وہ صورت جبکہ ل = م قابل غور ہے یہاں ضابطہ $\dfrac{|\underline{ل+م}}{|\underline{ل}\;|\underline{م}}$ سے صحیح جواب حاصل نہیں ہوتا۔

مثلاً ایک سادہ صورت پر غور کرو جہاں دو دو اشیا کے پارسل بنانے کے لیے ۴ اشیا ا، ب، ج، د اس طرح تقسیم کی گئی ہیں یعنی

ا ب اور ج د
ا ج " ب د
ا د " ب ج
ب ج " ا د

ب د اور ا ج

ج د " ا ب

یہیں ضابطہ ہ ج ہ سے معلوم ہے کہ اس قسم کی تقسیم کے $\frac{4!}{2!\,2!}$ یعنی ۶ طریقے ہیں لیکن ہر ایک طریقہ دو دفعہ تکرار پاتا ہے پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ مختلف طریقوں کی تعداد مندرجۂ بالا کا نصف ہے۔

اسی طرح سے جب ۲ ل اشیاء کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں سے ہر ایک پارسل میں ل اشیاء شامل ہوں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $= \frac{(2\text{ل})!}{2\,\text{ل}!\,\text{ل}!}$ ، اس میں پارسلوں کی ترتیب میں کچھ امتیاز نہیں کیا گیا ہے۔ اگر پارسلوں کی ترتیب میں امتیاز کیا جائے اور یہی پارسل دو شخصوں کو دیے جائیں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $\frac{(2\text{ل})!}{(\text{ل}!)^2}$ ہونگے۔

اسی طرح سے اگر ضابطہ $\frac{(\text{ل}+\text{م}+\text{ن})!}{\text{ل}!\,\text{م}!\,\text{ن}!}$ میں ل = م = ن رکھیں تو حاصل ہوگا $\frac{(3\text{ل})!}{(\text{ل}!)^3}$ ، اس میں تین پارسلوں کی مختلف ترتیبوں میں امتیاز کیا گیا ہے۔ اگر ان تین پارسلوں کی ترتیب میں امتیاز نہ کیا جائے تو ۳ ل اشیاء میں سے ل، ل اشیاء کے تین پارسل بنانے کے مختلف طریقوں کی تعداد

$$= \frac{(3\text{ل})!}{3!\,(\text{ل}!)^3}$$

مثال ۱ — ۱۰ خطوط میں سے چھ چھ اور چار چار کے دو پارسل

کتنی طرح سے بن سکتے ہیں؟

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \frac{|\underline{10}}{|\underline{6}\ |\underline{4}} = ۲۱۰$

کتنی طرح سے ۱۰ خطوط دو شخصوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی ایک کو ۶ دیے جائیں اور ۴ دوسرے کو؟

۶ خطوط کے دو پارسل جب ایک دفعہ بن جائیں تو وہ دو شخصوں میں $|\underline{2}$ طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \frac{|\underline{2}\ |\underline{10}}{|\underline{6}\ |\underline{4}} = ۴۲۰$

**مثال ۲** — ۱۵ خطوط میں سے پانچ پانچ کے تین پارسل کتنی مختلف طرح سے بن سکتے ہیں جب پارسلوں کی ترتیب کو ملحوظ نہ رکھا جائے؟

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= \frac{|\underline{15}}{|\underline{5}\ |\underline{5}\ |\underline{5}} \times \frac{1}{|\underline{3}}$

اگر ۱۵ خطوط میں سے پانچ پانچ خطوط تین مختلف مکانوں پر دینے مطلوب ہوں تو اس صورت میں طریقوں کی تعداد = پانچ پانچ خطوط کے پارسل بنانے کی $|\underline{3}$ گنی $= \frac{|\underline{15}}{(|\underline{5})^3}$

# امثلہ نمبری ۱۱۱

۱ — ۵ حرف ا، ب، ج، د، ع میں سے چار چار حرف کی ایسی ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور ان کی تعداد دریافت کرو۔

۲ — ۵ حرف ا، ب، ج، د، ع کی وہ سب ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور ع حرف آخر یا برعکس اس کے۔ نیز ان کی تعداد دریافت کرو

۳ — حاصل ضرب ن (ن - ۱) (ن - ۲) ........ (ن - ۶) میں کل

اجزائے ضربی کی تعداد دریافت کرو۔

۴ — حاصل ضرب "ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳) ...... ر اجزائے ضربی تک" میں سب سے اخیر کا جزو ضربی دریافت کرو۔

۵ — اگر ${}^{ن}ت_{۴} = ۱۲ \, {}^{ن}ت_{۲}$ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۶ — ثابت کرو کہ ${}^{ن+۱}ت_{ر} = {}^{ن}ت_{ر} + ر \times {}^{ن}ت_{ر-۱}$

۷ — کسی لفظ میں ۴ حرف علت اور ۳ حرف صحیح شامل ہیں کتنی طرح سے ایک حرف علت اور ایک حرف صحیح ان میں سے اکھٹے منتخب ہو سکتے ہیں۔

۸ — ${}^{۸}ت_{۴}$، ${}^{۲۵}ت_{۵}$، ${}^{۲۲}ج_{۴}$، ${}^{۱۹}ج_{۱۱}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۹ — اگر ن اشیاء میں سے تین تین اشیاء کی ترتیبوں کا چار گنا ن - ۱ اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کے ۵ گنے کے برابر ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۰ — "احد عشرہ" کے حروف سے کل کتنی ترتیبیں بن سکتی ہیں اور ان میں سے کتنی ا سے شروع اور ح پر ختم ہونگی؟

۱۱ — ہندسے ۳، ۴، ۷، ۵، ۸، ۱ دیے ہوئے ہیں ان میں سے چار چار ہندسے لینے سے کتنے مختلف اجتماع بن سکتے ہیں اور اگر ان میں سے چار چار ہندسے لے کر مختلف اعداد بنائے جائیں تو ان کی تعداد کیا ہوگی؟

۱۲ — اگر ${}^{۲ن}ج_{۴} : {}^{ن}ج_{۲} = ۴۴ : ۳$ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳ — ۵ گھنٹوں میں سے سب کے سب اکٹھے بجنے سے کل کتنی مختلف آوازیں پیدا ہو سکتی ہیں؟

۱۴ — ۶ گھنٹے سب کے سب اکھٹے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں اگر سب سے اونچی آواز سب سے آخر ہو؟

۱۵ — کتنی راتوں کو ۲۴ سپاہیوں میں سے چار آدمیوں کے مختلف پہرے لگ سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے پہروں میں

ایک خاص آدمی شامل ہوگا؟

۱۶ — اگر ت اور ق ہمیشہ اکھٹے رہیں تو معلوم کرو کہ لفظ "متقاربۃ" کے حروف آپس میں کل کتنی طرح سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں۔

۱۷ — کسی قصباتی کونسل میں ۲۵ مشیر اور ۱۰ جاگیردار ہیں تو معلوم کرو کہ ان میں سے کل کتنی کمیٹیاں بن سکتی ہیں جبکہ ہر ایک کمیٹی میں ۵ مشیر اور ۳ جاگیردار ہوں۔

۱۸ — کل چھ انگریزی حروف ہیں، تین بڑے چھاپے کے اور تین چھوٹے کے اُن ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو جو (۱) بڑے حرف سے شروع ہوں۔ (۲) جو بڑے حرف سے شروع اور ختم ہوں۔

۱۹ — ۵۰ اشیاء میں سے ۴۶، ۴۶ اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰ — اگر $^{ن}ج_{۱۲}$ = $^{ن}ج_{۸}$ تو $^{ن}ج_{۱۷}$ اور $^{۲۲}ج_{ن}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۱ — کتنی طرح سے لفظ "**مجادلہ**" کے حروف آپس میں ترتیب دیے جا سکتے ہیں اگر ج اور د ہمیشہ طاق مقامات میں رہیں۔

۲۲ — ۴ افسر اور ۸ سپاہی ہیں، ان میں سے چھ چھ کی جماعتیں کتنی مختلف طرح سے منتخب ہو سکتی ہیں اگر ہر ایک جماعت میں (۱) صرف ایک افسر ہو (۲) کم از کم ایک افسر ہو۔

۲۳ — ۱۰ شخصوں میں سے چار یا زیادہ اشخاص کی ایک جماعت کتنی طرح سے منتخب ہو سکتی ہے؟

۲۴ — اگر $^{۱۸}ج_{ر}$ = $^{۱۸}ج_{ر+۲}$ تو $^{ر}ج_{۵}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵ — کسی ریلوے لائن پر ۱۵ اسٹیشن ہیں، کل ٹکٹوں کی تعداد دریافت کرو تاکہ ہر ایک اسٹیشن پر ایک مسافر کو باقی تمام اسٹیشنوں کے ٹکٹ مل سکیں۔

۲۶ — ٹینس کے کھلاڑی ۶ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں اگر ہر ایک طرف ایک انگریز اور ایک ہندوستانی اکھٹے کھیلیں تو

معلوم کرو کہ ایک ٹینس کی بازی کھیلنے کے لیے انتخاب کتنی طرح سے ہو سکتا ہے ۔

۲۷ ـــ ۲۵ حرف صحیح اور ۵ حرف علت ہیں سے کل کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جبکہ ہر ایک لفظ میں ۳ حرف علت اور ۲ صحیح ہوں ؟

۲۸ ـــ ایک کتب خانہ میں ۲۰ لاطینی اور ۶ یونانی کتابیں ہیں اگر ان میں سے ۵ کتابیں منتخب کی جائیں جن میں تین لاطینی اور دو یونانی ہوں تو بتاؤ کہ ان کو منتخب کرنے اور ایک الماری کے خانے میں ترتیب دینے کے کل کتنے طریقے ہو سکتے ہیں ؟

۲۹ ـــ کتنی طرح سے ۱۲ اشیا ۴ شخصوں میں برابر تقسیم ہو سکتی ہیں ؟

۳۰ ـــ تین بڑے چھاپے کے حرف، ۵ حرف صحیح اور ۴ حرف علت ہیں سے ایسے الفاظ بنانے مطلوب ہیں جو بڑے حرف سے شروع ہوں اور جن میں سے ہر ایک میں ۲ حرف علت اور ۳ حرف صحیح شامل ہوں، الفاظ کی تعداد دریافت کرو ۔

۳۱ ـــ کسی ممبری کے انتخاب پر ۱۰، ۱۵، ۲۰ آدمیوں کو بالترتیب تین اضلاع سے اظہار رائے کی درخواست کرنی ہے اگر کل امیدوار ۵۴ ہوں تو معلوم کرو کہ ان کی تقسیم مختلف اضلاع میں کل کتنی طرح سے ہو سکتی ہے ۔

۳۲ ـــ ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۲ صرف ایک طرف چپو چلا سکتے ہیں اور ایک صرف دوسری طرف تو معلوم کرو کہ کشتی میں ملاح کتنی طرح سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں ۔

۳۳ ـــ کتنی طرح سے ۱۰ امتحان کے پرچے اس طرح ترتیب دیے جا سکتے ہیں کہ سب سے اچھا پرچہ سب سے بُرے پرچے کے ساتھ کبھی اکٹھا نہ ہو ؟

۳۴ ـــ ایک آٹھ چپو کشتی کے ملاحوں کو ایسے ۱۱ اشخاص سے

منتخب کرنا ہے جن میں سے تین کشتی کی رہنمائی کر سکتے ہیں مگر چپو نہیں چلا سکتے اور باقی چپو چلا سکتے ہیں مگر رہنمائی نہیں کر سکتے اگر دو آدمی صرف دائیں طرف چپو چلا سکیں تو معلوم کرو کہ کل ملاح کشتی میں کتنی طرح سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں۔

۳۵ — ثابت کرو کہ ث مثبت اور ن منفی علامات جبر یہ کو ایک قطار میں ترتیب دینے کے کل طریقے $ج^{ث+۱}_{ن}$ ہیں اگر دو منفی علامات کبھی اکھٹی نہ ہوں۔

۳۶ — اگر $پ^{ن}_{ر+۶} : پ^{ن}_{ر+۳} = ۳۰۸۰۰ : ۱$ تو ر کی قیمت دریافت کرو۔

۳۷ — چھ مختلف رنگ کے جھنڈوں کو ایک دوسرے پر اکھٹا کھڑا کرنے سے کل کتنے مختلف نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی سی تعداد ایک وقت اکھٹی کھڑی کی جا سکے۔

۳۸ — اگر $ج^{۲۸}_{۲ر} : ج^{۲۴}_{۲ر-۴} = ۲۲۵ : ۱۱$ تو ر کی قیمت دریافت کرو۔

۳۹ — اگر لفظ "دستاویز" کے حروف میں سے چار چار حروف لے کر اُن کے مختلف الفاظ بنائے جائیں تو معلوم کرو کہ ان میں سے کتنے الفاظ میں حرف س واقع ہوگا۔

۱۴۴ — اب تک جتنے مسائل ہم نے ثابت کیے ان میں اشیاء مختلف تھیں۔ اس سے پیشتر کہ ہم ان صورتوں پر غور کریں جن میں اشیاء کے ایک یا ایک سے زیادہ جٹ متماثل یا متشابہ ہوں، یہ بیان کر دینا ضروری ہوگا کہ کن معانی میں ہم الفاظ مختلف اور متشابہ کو استعمال کرتے ہیں۔ اشیاء کے مختلف اور غیر متشابہ ہونے سے ہماری یہ مراد ہے کہ دیکھنے میں وہ مختلف ہیں اور ایک دوسری سے بآسانی تمیز ہو سکتی ہیں۔ برعکس اس کے ہم لفظ متماثل یا متشابہ سے ایسی اشیاء تعبیر کرتے ہیں جو دیکھنے میں

یکساں اور ہر طرح سے مشابہ ہیں اور ایک دوسری سے تمیز نہیں ہو سکتیں۔

۱۴۵۔ فرض کرو کہ ہمیں ایسی بارہ کتابوں کو کسی طاق پر ترتیب دینا ہے جن میں سے ۵ لاطینی ہیں ۴ انگریزی اور باقی مختلف زبانوں میں۔

ہر ایک زبان کی کتابوں میں ایک مشترک خاصیت ہے جس کی وجہ سے وہ سب کی سب ایک ہی جنس میں شمار ہو سکتی ہیں لیکن اگر وہ ایک دوسری سے شناخت ہو سکیں تو ترتیبوں کی تعداد $\underline{|12}$ ہوگی کیونکہ بلحاظ ترتیب کے وہ ایک دوسری سے مختلف ہیں۔

اگر ایک زبان کی کتابیں ایک دوسری سے تمیز نہ ہو سکیں تو اس صورت میں ہمیں ۱۲ اشیاء کی ترتیبیں دریافت کرنی چاہییں جب کہ ان میں سے ۵ ایک قسم کی ہیں اور ۴ دوسری قسم کی۔ یہ مسئلہ ان صورتوں میں ٹھیک طور پر شامل نہیں ہے جن کی ہم اوپر تحقیق کر چکے ہیں۔

۱۴۶۔ ن اشیا میں سے ف اشیاء بالکل متشابہ اور ایک قسم کی ہیں، ق اشیا بالکل متشابہ اور دوسری قسم کی، ر اشیا بالکل متشابہ اور تیسری قسم کی اور باقی سب اشیاء مختلف۔ ان سب اشیاء کو ایک ساتھ آپس میں ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیا کو ہم ن حروف سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ حرف ا کی تعداد ف ہے، حرف ب کی تعداد ق، اور حرف ج کی تعداد ر اور باقی سب حروف مختلف ہیں۔

فرض کرو کہ مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد لا ہے۔

اب اگر ان لا ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب میں ف متشابہ حرف ا کی جگہ ایسے ف حروف رکھ دیں جو آپس میں

اور باقی ماندہ تمام حروف سے مختلف ہیں تو صرف ان نئے ف حروف
کی ترتیب کو بدلنے سے ابتدائی ایک ترتیب کی بجائے |ف
ترتیبیں حاصل ہونگی ۔ پس اگر لا ترتیبوں میں سے ہر ایک ترتیب
میں اس قسم کی تبدیلی کی جائے تو لا |ف ترتیبیں حاصل ہونگی ۔

اسی طرح اگر ان نئی ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب میں
ق متشابہ حروف ب کی جگہ ایسے ق حرف رکھ دیں جو آپس میں
اور باقی ماندہ تمام حروف سے مختلف ہیں تو ان سے ق حروف کی
ترتیبوں کو آپس میں بدلنے سے |ق نئی ترتیبیں حاصل ہونگی ۔

پس اس صورت میں نئی ترتیبوں کی مجموعی تعداد لا |ف |ق
ہوگی ۔

اسی طرح سے عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں اگر تمام کے تمام
حروف آپس میں مختلف ہوں تو ترتیبوں کی مجموعی تعداد
لا×|ف |ق |ر ہوگی لیکن ن مختلف حروف کو آپس میں ترتیب
دینے کے طریقوں کی تعداد |ن ہے ۔

پس لا |ف |ق |ر = |ن

اس لیے لا = |ن ÷ (|ف |ق |ر) اور یہ ترتیبوں کی مطلوبہ تعداد ہے ۔

ایسی ہر ایک صورت جس میں سب اشیاء مختلف نہ ہوں اسی
طرح سے حل ہو سکتی ہے ۔

مثال ۱ - کتنی مختلف ترتیبیں لفظ "ترترات" سے بن سکتی ہیں -
جبکہ کل حروف ہر ایک ترتیب میں شامل ہوں ۔

یہاں کل سات حرف ہیں جن میں سے چار ت ہیں دو ر اور
ایک ا ہے ۔ اس لیے ترتیبوں کی تعداد

= |۷ ÷ (|۴ |۲) = (۵×۶×۷) ÷ ۲ = ۱۰۵

**مثال ۲** ۔ لفظ "قسطنطنیہ" کے حروف سے کل کتنے مختلف الفاظ بن سکتے ہیں اور اُن میں سے کتنے الفاظ میں دونوں ن متصل ہونگے؟
کل حرف ۸ ہیں جن میں سے دو ط ہیں، دو ن اور باقی مختلف

اس لیے الفاظ کی تعداد مطلوبہ = $\frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2}$

$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 2$

$= 5040 \times 2 = 10080$

اگر دونوں ن ہمیشہ اکھٹے رہیں تو ہم اُنہیں ایک حرف خیال کر سکتے ہیں اور ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ۷ حرف رہینگے جن میں سے دو ط ہیں اور ان کو آپس میں ترتیب دینے کے

مختلف طریقے = $\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2}$

$= 2520$

**مثال ۳** ۔ حاصل ضرب $ا^5 س ع^4 ف$ کے حروف کتنی مختلف طرح سے اکھٹے ترتیب دیے جا سکتے ہیں۔
کل حرف ۱۱ ہیں جن میں سے پانچ ا ہیں اور چار ع

اس لیے اُنہیں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے = $\frac{\lfloor 11}{\lfloor 5 \lfloor 4}$

$= 7 \times 2 \times 9 \times 10 \times 11$

$= 13860$

**مثال ۴** ۔ اگر طاق ہندسے ہمیشہ طاق مقامات پر لکھے جائیں تو معلوم کرو کہ مفصلۂ ذیل سات ہندسوں سے کل کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں۔

۱، ۲، ۳، ۴، ۳، ۲، ۱

طاق ہندسے ۱، ۳، ۳، ۱ ہیں ان کو چار طاق مقامات میں ترتیب

دینے کے طریقے = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}$ .................... (۱)

جفت ہندسوں ۲، ۴، ۲ کو تین جفت مقامات میں ترتیب دینے

کے طریقے = $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ .................... (۲)

(۱) کا ہر ایک طریقہ (۲) کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے

اس لیے اعداد مطلوبہ کی تعداد = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 6 \times 3 = 18$

**مثال ۵۔** دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد سات ہندسوں ۲، ۳، ۰، ۳، ۴، ۲، ۳ سے بن سکتے ہیں۔

چونکہ ہر ایک عدد میں کم از کم سات ہندسے ہونے چاہییں۔ اس لیے ہمیں اوپر کے سب ہندسے اکٹھے استعمال کرنے پڑینگے۔

اب ان سات ہندسوں میں دو ۲ ہیں اور تین ۳ اس لیے ان سات ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کے مختلف طریقوں کی

تعداد = $\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \lfloor 3} = 420$ لیکن ان میں وہ ترتیبیں بھی شامل ہیں جن میں بائیں طرف سب سے پہلا ہندسہ صفر ہے چونکہ ان ترتیبوں سے اعداد مطلوبہ حاصل نہیں ہوتے اس لیے انہیں خارج کرنا چاہیے۔

صریحاً صفر سے اس طرح شروع ہونے والی ترتیبوں کی تعداد وہی ہے جو باقی ۶ ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد

اس لیے ان کی تعداد = $\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 2} = 60$

پس تعداد مطلوبہ = $420 - 60 = 360$

**۱۴۷۔** ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں اُس صورت میں دریافت کرو جبکہ ہر ایک شئے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو مرتبہ، تین مرتبہ . . . . . ر مرتبہ تکرار پا سکے۔

اس جگہ ن مختلف اشیا سے ر مقامات پُر کرنے مطلوب ہیں جبکہ کسی ایک ترتیب میں ن اشیا میں سے کسی ایک شئے کو ہم جتنی دفعہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں۔

پہلا مقام ن طرح سے پُر ہو سکتا ہے اور جب یہ کسی ایک طرح سے پُر ہو جائے تو دوسرا بھی ن طرح سے پُر ہو سکتا ہے کیونکہ شرائط سوال سے ایک ہی شئے کو دوبارہ استعمال کرنے کی اجازت ہے۔ اس لیے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے طریقے ن × ن یا $ن^۲$ ہیں۔ تیسرا مقام ن طرح سے پُر ہو سکتا ہے اور اس لیے پہلے تین مقامات $ن^۳$ طریقوں سے پُر ہو سکتے ہیں۔

اسی طرح عمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک منزل پر ن کا قوت نما پُر کردہ مقامات کی تعداد کے برابر ہے اس لیے ر مقامات پُر کرنے کے کل طریقے $ن^ر$ ہیں۔

**مثال۔** کسی اسکول کے سالانہ جلسہ پر ۵ انعام ۴ لڑکوں کو دیے جائینگے۔ اگر ہر ایک لڑکا ایک یا ایک سے زیادہ انعاموں کا مستحق ہو سکے تو معلوم کرو کہ کتنی طرح سے انعام تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پانچ انعاموں میں سے کوئی سا انعام ۴ طریقوں سے دیا جا سکتا ہے اور پھر باقی ماندہ انعاموں میں سے کوئی سا ۴ طریقوں سے دیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ اسی لڑکے کو دیا جا سکتا ہے جو پہلے انعام لے چکا ہے۔ اس طرح سے دو انعام $۴^۲$ طریقوں سے اور تین انعام $۴^۳$ طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لیے پانچوں انعام $۴^۵$ یعنی ۱۰۲۴ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

**۱۴۸۔ ن اشیاء میں سے چند یا سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔**

ایسے انتخاب میں ہر ایک شے پر دو طرح کا عمل ہو سکتا ہے وہ لی جا سکتی ہے یا چھوڑی جا سکتی ہے اور چونکہ ایسے طرزِ عمل کے مختلف طریقے آپس میں منسلک ہو سکتے ہیں اس لیے ن اشیاء پر ایسا عمل کرنے کے کل طریقے

= ۲ × ۲ × ۲ × ......... ن اجزائے ضربی تک

مگر اس میں وہ صورت بھی شامل ہے جس میں تمام اشیا چھوڑ دی گئی ہیں اور کوئی منتخب نہیں کی گئی اس لیے اگر اس کو خارج کر دیا جائے تو مطلوبہ طریقوں کی تعداد $۲^{\text{ن}} - ۱$ ہوگی۔

اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ن اشیاء کے "کل ممکن اجتماعوں کی تعداد" $۲^{\text{ن}} - ۱$ ہے۔

**مثال** - ایک شخص کے ۶ دوست ہیں وہ اُن میں سے ایک یا زیادہ کو کتنی طرح سے مہمان بلا سکتا ہے؟

اُسے اپنے چھ احباب میں سے چند یا سب کے سب منتخب کرنے ہیں۔

اس لیے کل طریقے = $۲^{۶} - ۱ = ۶۳$

اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے۔

مہمانوں میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، .... بلائے جا سکتے ہیں۔ اس لیے انتخابوں کی کل تعداد = ${}_{۶}\text{ج}_{۱} + {}_{۶}\text{ج}_{۲} + {}_{۶}\text{ج}_{۳} + {}_{۶}\text{ج}_{۴} + {}_{۶}\text{ج}_{۵} + {}_{۶}\text{ج}_{۶}$

= ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱ = ۶۳

**۱۴۹۔ ر کی کس قیمت کے لیے ن اشیاء میں سے "ر" اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد بڑی سے بڑی ہوگی؟**

سلسلہ ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}$، ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}$، ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{۳}$، ..... ${}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ..... پر غور کرو۔

ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس سلسلے کی کون سی رقم سب سے بڑی ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ۱، ۲، ۳، ..... ن میں سے کون سی قیمت ر کو دی جائے کہ $_{ن}ج_{ر}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہو۔

چونکہ
$$_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-1)(ن-2)\cdots\cdots(ن-ر+2)(ن-ر+1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots(ر-1)ر}$$

اور
$$_{ن}ج_{ر-1} = \frac{ن(ن-1)(ن-2)\cdots\cdots(ن-ر+2)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots(ر-1)}$$

اس لیے
$$_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ر-1} \times \frac{ن-ر+1}{ر}$$

ضارب جزو ضربی $\frac{ن-ر+1}{ر}$ صورت $\frac{ن+1}{ر}-1$ میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ر کی قیمت بڑھتی ہے ویسے اس جزو ضربی کی قیمت گھٹتی ہے پس اگر ر کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ..... ن بالترتیب دی جائیں تو $_{ن}ج_{ر}$ کی قیمت متواتر بڑھتی جائیگی جب تک کہ جزو ضربی $\frac{ن+1}{ر}-1$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

اب
$$\frac{ن+1}{ر}-1 > 1$$

جب تک کہ
$$\frac{ن+1}{ر} > 2$$

یعنی
$$ر < \frac{ن+1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

اب ہمیں ر کی وہ بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرنی ہے جو رشتہ (۱) کو پورا کرے۔

صورت اول۔ اگر ن جفت ہو اور ۲م کے برابر ہو تو

$$\frac{ن+۱}{۲} = \frac{۲م+۱}{۲} = م + \frac{۱}{۲}$$

اب اگر ر کو سب قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...... م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان قیمتوں کے لیے $\frac{ن+۱}{۲}$ یعنی $م + \frac{۱}{۲}$ ہر ایک صورت میں ر سے بڑا ہے یعنی ر کی ایسی تمام قیمتوں کے لیے رشتہ (۱) پورا ہوتا ہے اس لیے ر کو م یعنی $\frac{ن}{۲}$ کے مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد $_{ن}ج_{\frac{ن}{۲}}$ ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ن طاق ہے اور ۲م + ۱ کے برابر ہے تو

$$\frac{ن+۱}{۲} = \frac{۲م+۲}{۲} = م+۱$$

اب اگر ر کو تمام قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...... م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان سب قیمتوں کے لیے $\frac{ن+۱}{۲}$ یعنی م + ۱ ر سے بڑا ہے لیکن جب ر = م + ۱

تو جزو ضربی $\frac{ن-ر+۱}{ر} = \frac{۲م+۱-م-۱+۱}{م+۱} = ۱$ اور

$$_{ن}ج_{م+۱} = {}_{ن}ج_{م} \quad \text{یعنی} \quad {}_{ن}ج_{\frac{ن+۱}{۲}} = {}_{ن}ج_{\frac{ن-۱}{۲}}$$

اور اس لیے اجتماعوں کی تعداد اُس وقت بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ ن اشیا میں سے $\frac{ن+۱}{۲}$ یا $\frac{ن-۱}{۲}$ اشیا کے اجتماع بنائے جائیں اور نتیجہ دونوں صورتوں میں ایک ہی ہوگا۔

**مثال** - ایک شخص کے دس دوست ہیں وہ انہیں اس طرح مہمان بلانا چاہتا ہے کہ ہر ایک دعوت میں مہمانوں کی تعداد ایک ہی ہو اور کسی دو دعوتوں میں وہی مہمان

نہ آئیں اگر وہ زیادہ سے زیادہ ایسی دعوتیں دینا چاہے تو معلوم کرو کہ ہر مرتبہ کتنے مہمان بلائے۔ مہمانوں کی مختلف جماعتوں کی تعداد = $_{۱۱}ج_ر$ جہاں ر مہمانوں کی تعداد ہے۔

$$_{۱۱}ج_ر = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \ldots\ldots (۱۲ - ر)(۱۱ - ر)}{۱ \times ۲ \times \ldots\ldots (ر - ۱) ر}$$

$$_{۱۱}ج_{ر-۱} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \ldots\ldots (۱۲ - ر)}{۱ \times ۲ \times \ldots\ldots (ر - ۱)}$$

$$\frac{_{۱۱}ج_ر}{_{۱۱}ج_{ر-۱}} = \frac{۱۱ - ر}{ر}$$

اب $_{۱۱}ج_ر > {}_{۱۱}ج_{ر-۱}$

اگر $۱۱ - ر > ر$

یعنی $۱۱ > ۲ر$

یعنی $\frac{۱۱}{۲} > ر$ ............ (۱)

پس غیر مساوات (۱) کے موافق ر کی بڑی سے بڑی قیمت ۵ ہے معلوم ہوا کہ اُسے ہر مرتبہ ۵ مہمان بلانے چاہییں۔

**۱۵۰**۔ قاعدہ ترتیب اشیا، دفعہ ۱۳۷ کی اعانت کے بغیر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے کل اجتماع $_نج_ر$ سے تعبیر ہوتے ہیں اور ن حروف ا، ب، ج، د وغیرہ دی ہوئی ن اشیا کو تعبیر کرتے ہیں۔

حروف ا، ب، ج، د وغیرہ میں سے ا کو علیحدہ کرو اور باقی ن - ۱ حروف میں سے ر - ۱، ر - ۱ اشیا کے $_{ن-۱}ج_{ر-۱}$ اجتماع بناؤ اب ان سب اجتماعوں کے ساتھ ا کو لکھ دو تو معلوم ہوگا کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں ا شامل ہے $_{ن-۱}ج_{ر-۱}$ ہیں اسی طرح سے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں ب شامل

ہے۔ $_{ن-١}ج_{ر-١}$ ہے اور اسی طرح ن حروف میں سے ہر ایک حرف کے لیے۔

اس لیے ن $\times {}_{ن-١}ج_{ر-١}$ = ر، ر اشیا کے اجتماع جن میں ا شامل ہے + ر، ر اشیاء کے اجتماع جن میں ب شامل ہے + ر، ر اشیا کے اجتماع جن میں ج شامل ہے + وغیرہ۔

لیکن اس طرح اجتماع بنانے میں ہر ایک اجتماع ر دفعہ مکرر آئیگا مثلاً اجتماع ا ب ج د ....... (جس میں ر حروف ہیں) ایک ایک دفعہ اُن سب اجتماعوں میں واقع ہوگا جن میں ا شامل ہے، جن میں ب شامل ہے جن میں ج شامل ہے اور علیٰ ہذالقیاس۔

پس معلوم ہوا کہ

$$_{ن}ج_{ر} = {}_{ن-١}ج_{ر-١} \times \frac{ن}{ر}$$

ن اور ر کی جگہ بالترتیب ن-١ اور ر-١ لکھنے سے

$$_{ن-١}ج_{ر-١} = {}_{ن-٢}ج_{ر-٢} \times \frac{ن-١}{ر-١}$$

اسی طرح سے $_{ن-٢}ج_{ر-٢} = {}_{ن-٣}ج_{ر-٣} \times \frac{ن-٢}{ر-٢}$

..........................

$$_{ن-ر+٢}ج_{٢} = {}_{ن-ر+١}ج_{١} \times \frac{ن-ر+٢}{٢}$$

$$_{ن-ر+١}ج_{١} = ن-ر+١$$

ستونوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیں اور متماثل ارقام کو طرفین سے خارج کریں تو حاصل ہوگا۔

$$_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)\ldots\ldots(ن-ر+١)}{ر(ر-١)(ر-٢)\ldots\ldots١}$$

**۱۵۱۔** ثابت کرو کہ $_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱} = {}_{ن+۱}ج_{ر}$

ن + ۱ اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے بموجب اس کے کہ ان میں ایک خاص شے شامل ہے یا نہیں ۔ ان اجتماعوں کی تعداد جن میں ایک خاص شے شامل ہے $_{ن}ج_{ر-۱}$ سے تعبیر ہو گی اور ان اجتماعوں کی تعداد جن میں وہ خاص شے شامل نہیں ہے $_{ن}ج_{ر}$ سے تعبیر ہو گی ۔ پس حاصل ہوتا ہے کہ

$$_{ن}ج_{ر-۱} + {}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن+۱}ج_{ر}$$

**مشق :**— مندرجۂ بالا نتیجہ کو $_{ن}ج_{ر}$ کی قیمت کے ضابطہ کی مدد سے حاصل کرو ۔

**۱۵۲۔** اگر ف + ق + ر + ...... اشیا میں سے ف اشیا متشابہ اور ایک قسم کی ہوں، ق اشیا متشابہ اشیا اور دوسری قسم کی ر اشیا متشابہ اور تیسری قسم کی اور علیٰ ہذا القیاس تو ان میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو ۔

ایسے انتخابوں میں ف اشیا ف + ۱ طرح سے استعمال میں آ سکتی ہیں کیونکہ ہم ان میں سے ۰، ۱، ۲، ۳ ..... ف اشیا منتخب کر سکتے ہیں اسی طرح سے ق اشیا ق + ۱ طرح سے استعمال میں آ سکتی ہیں، ر اشیا ر + ۱ طرح سے اور علیٰ ہذا القیاس ۔

اس لیے سب اشیا کو استعمال میں لانے کے کل طریقے (ف + ۱) (ق + ۱) (ر + ۱) ........ ہیں لیکن ان میں وہ طریقہ بھی شامل ہے جب کوئی شے بھی منتخب نہ کی گئی ہو اس صورت کو خارج کرنے سے کل مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$= (ف + ۱) (ق + ۱) (ر + ۱) ....... - ۱$$

**۱۵۳**۔ جب کل اشیاء مختلف نہ ہوں تو ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں یا ترتیبوں کی تعداد معلوم کرنے کا عام قاعدہ ذرا پیچیدہ ہوگا لیکن اس کی خاص صورتیں اس طرح حل ہو سکتی ہیں۔

**مثال** ــ لفظ "متمنیات" کے حروف سے چار چار حرف کے (۱) اجتماع (۲) ترتیبیں کتنی مختلف طرح سے بن سکتی ہیں۔

یہاں ۵ مختلف اقسام کے ۸ حرف ہیں م، م، ت، ت، ن، ن، ی، ا، چار چار حرف کے مجموعے مفصلۂ ذیل حروف کو اکھٹا کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) دو متشابہ حرف، دو اور متشابہ حروف

(۲) دو متشابہ ״ ، دو مختلف ״ ״

(۳) چاروں مختلف ״

(۱) یہ انتخاب $^{۳}\text{ج}_{۲}$ طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ۳ جوڑوں م، م، ت، ت، ن، ن میں سے ہمیں صرف ۲ منتخب کرنے ہیں پس اس قسم کے اجتماع $^{۳}\text{ج}_{۲} = ۳$

(۲) یہ انتخاب $^{۳}\text{ج}_{۱} \times {}^{۴}\text{ج}_{۲}$ طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ متشابہ حروف کا صرف ایک جوڑا لینا ہے اور باقی ۴ قسم کے حروف میں سے دو مختلف حرف منتخب کرنے ہیں پس اس صورت میں اجتماعوں کی تعداد ۱۸ ہے۔

(۳) یہ انتخاب $^{۵}\text{ج}_{۴}$ طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ۵ حرف م، ت، ن، ی، ا میں سے ہمیں صرف ۴ حروف منتخب کرنے ہیں ان اجتماعوں کی تعداد ۵ ہے۔

پس کل مطلوبہ اجتماعوں کی تعداد = ۳ + ۱۸ + ۵ = ۲۶

چار چار حرف کی مختلف ترتیبوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ہمیں مندرجۂ بالا اجتماعوں میں سے ہر ایک کو آپس میں تمام ممکن

طریقوں سے ترتیب دینا چاہیے۔

(۱) سے $۳ \times \frac{|۴}{|۲ \times |۲}$ یا ۱۸ ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں

(۲) سے $\frac{۱۸ \times |۴}{|۲}$ یا ۲۱۶ " " "

(۳) سے $۵ \times |۴$ یا ۱۲۰

مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد = ۱۸ + ۲۱۶ + ۱۲۰ = ۳۵۴

## مدوّر ترتیبیں

**۱۵۴**۔ اشیا کی ترتیبیں لگاتے وقت اُن کو بالعموم ایک خطِ مستقیم پر ترتیب دیا ہوا فرض کرتے ہیں ایسی صورت میں ترتیب کا آغاز بھی ہوتا ہے اور انجام بھی۔ اس قسم کی ترتیبوں کو خطی یا عرضی ترتیبیں کہتے ہیں (اب تک ہم نے صرف ایسی ترتیبوں پر غور کیا ہے) لیکن اگر ہم اشیا کو دائرے کے محیط پر بالقرینہ ترتیب دیں تو ترتیب کا نہ آغاز ہے نہ انجام، ایسی ترتیب کو ترتیب مدوّر یا گول ترتیب کہتے ہیں۔

اگر کسی خطِ مستقیم پر ۶ حرف اُ، ب، ج، د، ع، ف کو حسب ذیل ۶ طرح سے ترتیب دیں تو یہ سب ترتیبیں مختلف کہلائینگی۔

ا ب ج د ع ف

ف ا ب ج د ع

ع ف ا ب ج د

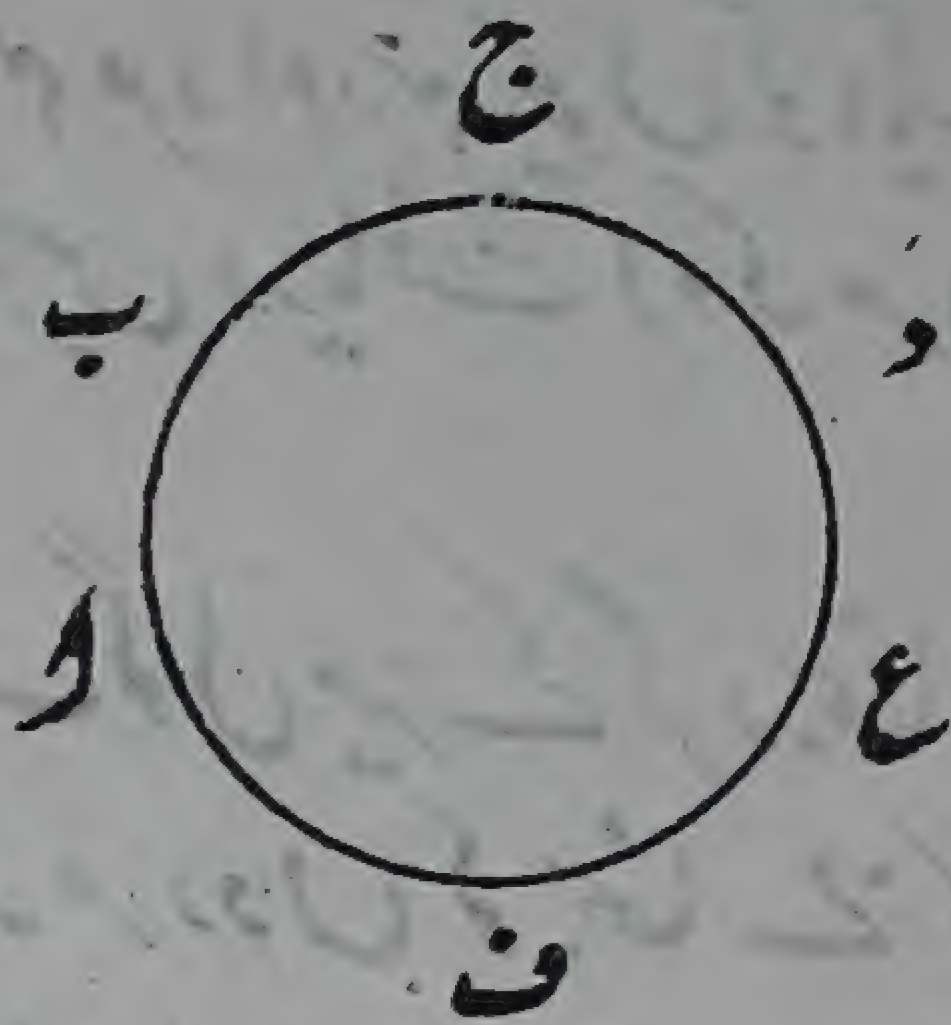
د ع ف ا ب ج

ج د ع ف ا ب

ب ج د ع ف ا

لیکن ان ۶ مختلف خطی ترتیبوں کے جواب میں صرف ایک

مدوّر ترتیب حاصل ہوتی ہے جیسا کہ ذیل کی شکل سے ظاہر ہے

ج
ب د
ا ع
ف

پس معلوم ہوا کہ ۶ اشیا کو ایک دائرہ کے محیط پر ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد = ۶ت۶ / ۶ = ۶! / ۶ = ۵!

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن مختلف اشیا کو ایک دائرہ کے گرد ترتیب کے طریقوں کی تعداد = (ن-۱)!

## ۱۵۵۔ موتیوں کے ہار

اگر ن مختلف موتیوں کو ایک ہار میں پرونا منظور ہو تو انہیں مختلف طرح سے آپس میں ترتیب دینے کے طریقے ½ (ن-۱)! ہونگے۔

کیونکہ فرض کرو کہ کسی ہار میں چھ موتی ہیں اور ان کی ترتیب گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ا ب ج د ع ف ہے (دیکھو شکل دفعہ سابق)۔

اب اگر ہار کو الٹ دیا جائے اور پہلی ترتیب کو اسی سمت میں یعنی موافق سمت ساعت پڑھا جائے تو وہ ف ع د ج ب ا ہوگی پس معلوم ہوا کہ دو ترتیبیں جو دائرہ کے محیط پر ترتیب دی ہوئی اشیا کی صورت میں مختلف تھیں ہار کی حالت میں ایک ہی ہیں۔

اس لیے ہار کے ن موتیوں کی مختلف ترتیبوں کی تعداد

= ن اشیا کو ایک دائرہ کے محیط پر ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد کا نصف = ½ |ن-۱

**مثال ۱۔** ۴ مرد اور ۴ بچوں کو ایک گول میز کے گرد اس طرح بٹھانے کی کل مختلف ترتیبیں دریافت کرو کہ ہر ایک بچہ دو مردوں کے درمیان ہو۔

چار مردوں کو ایک گول میز کے گرد بٹھانے کے طریقوں کی تعداد = |۳، فرض کرو کہ مردوں کو بٹھانے کا ایک طریقہ شکل ذیل میں مندرج ہے جہاں م۱، م۲، م۳، م۴ چار مردوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

م۱ ، ع۱ ، م۲ ، ع۲ ، م۳ ، ع۳ ، م۴ ، ع۴

تب صریحاً چار مردوں کے درمیان ۴ مقام (ع۱، ع۲، ع۳، ع۴) ہیں جو بموجب شرائط سوال چار بچوں کے لیے مخصوص ہیں پس معلوم ہوا کہ مردوں کو بٹھانے کے ایک طریقے کے مقابل بچوں کو بٹھانے کے طریقے |۴ ہیں۔

پس مطلوبہ طریقوں کی کل تعداد = |۳ × |۴ = ۶ × ۲۴ = ۱۴۴

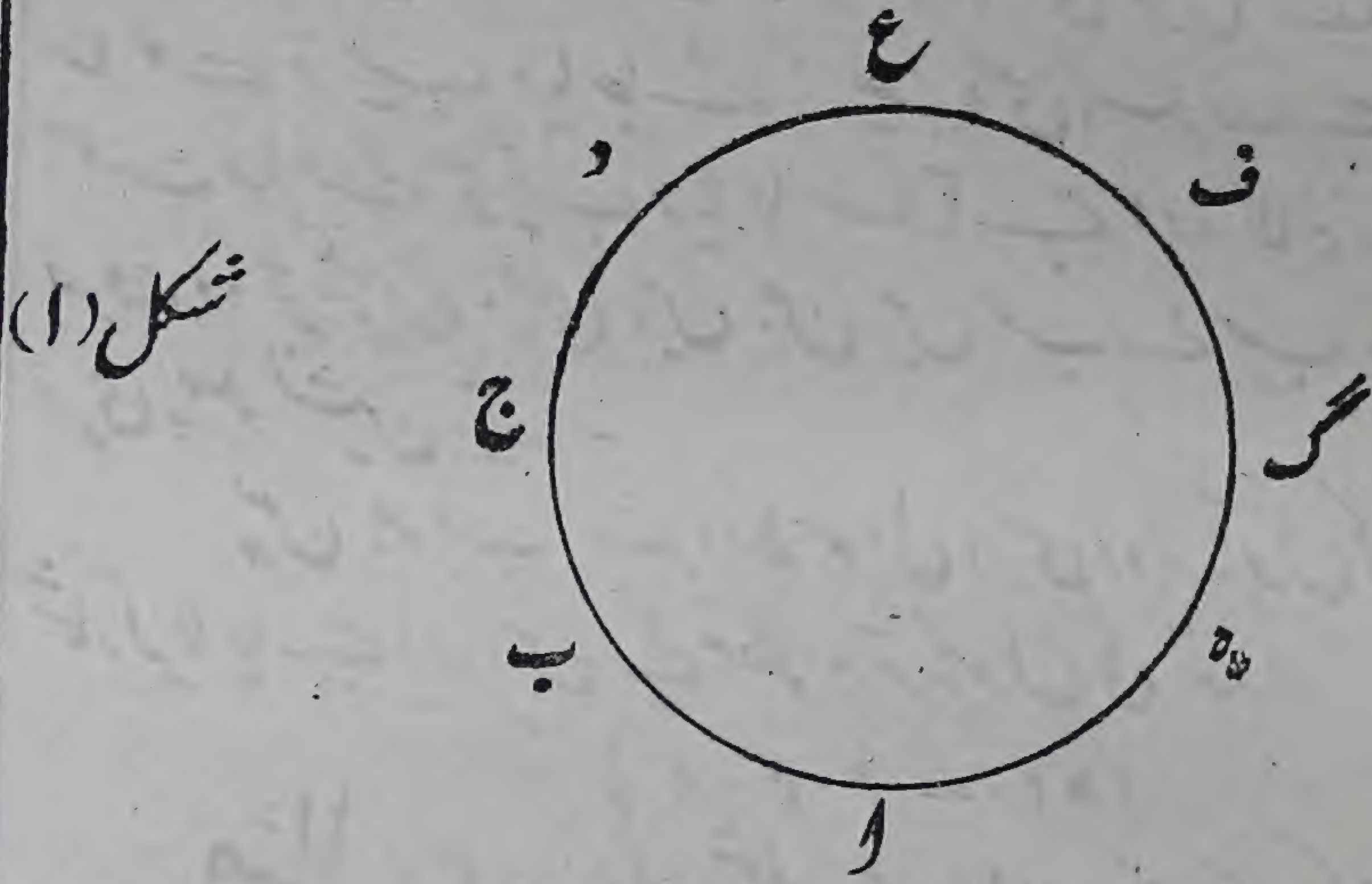
**مثال ۲۔** کتنی طرح سے ۸ آدمی ایک گول میز کے گرد اس طرح بیٹھ سکتے ہیں کہ کسی دو ترتیبوں میں ان میں سے ہر ایک کے

دائیں بائیں وہی پہلو نشین نہ ہوں۔

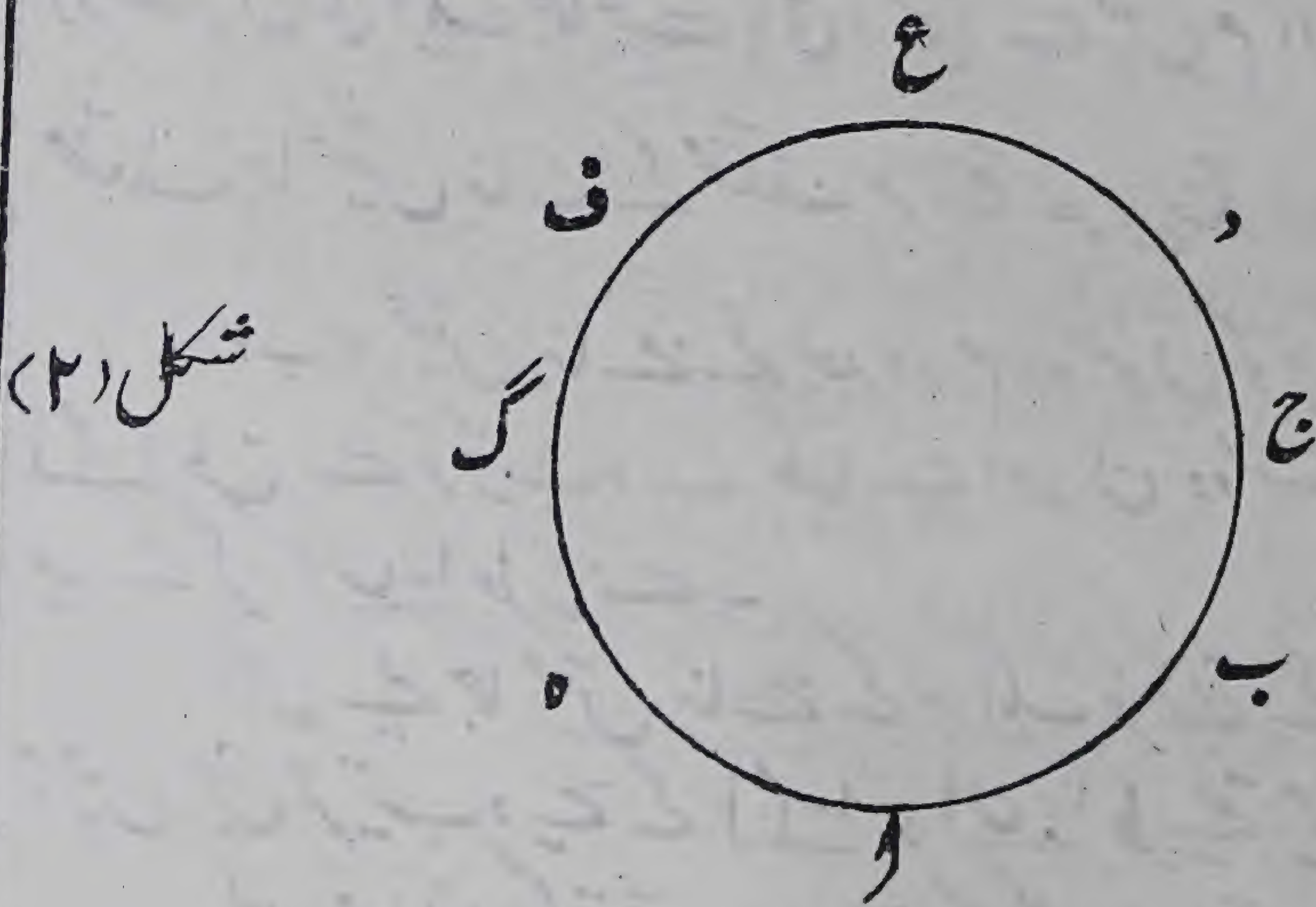
۸ آدمیوں کو گول میز کے گرد ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد = $\underline{|7}$ = ۵۰۴۰

فرض کرو کہ ایک ترتیب یہ ہے شکل (۱)



شکل (۱)

اگر ا کو اپنی جگہ سے نہ ہلایا جائے تو صریحاً ۵۰۴۰ ترتیبوں میں ایک اور یہ ہوگی شکل (۲)



شکل (۲)

ظاہر ہے کہ اوپر کی دونوں ترتیبوں میں ۸ آدمیوں میں سے ہر ایک کے وہی پہلو نشین ہیں (مثلاً د کے دائیں بائیں پہلی اور دوسری ترتیب میں ج اور ع ہیں اگرچہ پہلی ترتیب کا دایاں ساتھی دوسری ترتیب میں بائیں طرف چلا گیا ہے) اور ہم دیکھتے ہیں کہ حروف ب، ج، د، ع، ف، گ، ہ کو خواہ کسی طرح سے موافق سمت ساعت ترتیب دیا جائے، بعینہٖ اسی اسلوب سے اُن کو مخالف سمتِ ساعت ترتیب دیا جا سکتا ہے اور ظاہر ہے کہ اس قسم کی صرف دو ترتیبیں ایسی ہیں جن میں سب کے سب ۸ شخصوں کے وہی پہلو نشین ہیں۔

پس بموجب شرائط سوال ایسی دو ترتیبوں کو صرف ایک ترتیب شمار کرنا چاہیے اور اس لیے مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد

$$= \frac{1}{2} \times ۵۰۴۰ = ۲۵۲۰$$

**مثال ۳** ۔ ایک شخص م + ن دوستوں کو مہمان بلاتا ہے اور م کو ایک گول میز کے گرد بٹھاتا ہے اور ن کو دوسری گول میز کے گرد ۔ معلوم کرو کہ آپس میں مہمان کتنی طرح سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں۔

م دوستوں کی ایک جماعت منتخب کرتے وقت ہر دفعہ ن دوستوں کی ایک جماعت باقی رہتی ہے پس م اور ن دوستوں کی مختلف جماعتیں بنانے کے مختلف طریقے $= {}_{م+ن}ج_{م} = \frac{\underline{|م+ن}}{\underline{|م}\ \underline{|ن}}$

اب جماعتیں بنانے کے بعد وہ م دوستوں کو ایک میز کے گرد $\underline{|م-۱}$ طرح سے ترتیب دے سکتا ہے اور ن دوستوں کو دوسری میز کے گرد $\underline{|ن-۱}$ طرح سے۔

اس لیے جماعتیں بنانے کے ہر ایک طریقے کے مقابل مہمانوں کو آپس میں ترتیب دینے کے $\underline{|م-۱} \times \underline{|ن-۱}$ طریقے ہیں۔

پس مہمانوں کو ترتیب دینے کے کل طریقے

= |م+ن ÷ |م |ن { |م-۱ × |ن-۱ } = م+ن ÷ م ن

# امثلہ نمبری ۱۱ ب

۱۔ ثابت کرو کہ ن ت ر = ن-۱ ت ر + ن-۱ ت ر-۱

۲۔ ثابت کرو کہ ۶ج۱ + ۶ج۲ + ۶ج۳ + ۶ج۴ + ۶ج۵ + ۶ج۶ = ۲^۶ - ۱

۳۔ آٹھ اشیا میں سے ایک یا ایک سے زیادہ اشیا منتخب کرنے کے مختلف طریقے دریافت کرو۔

۴۔ اگر ن ت۳ : ن ج۵ = ۱ : ۵ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۵۔ مفصلۂ ذیل الفاظ کے حروف سے جو مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔ (۱) **دارالترجمہ** (۲) **محمود ثانی** (۳) **الاستمداد**

۶۔ ۱۴ جھنڈیوں سے ایک کمرہ سجانا ہے اگر ان میں ۲ نیلی، ۳ سرخ، ۲ سفید، ۳ سبز، ۲ زرد اور ۲ ارغوانی ہوں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے اکٹھی لٹکائی جا سکتی ہیں۔

۷۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد ہندسوں ۲، ۳، ۰، ۳، ۴، ۲، ۳ سے بن سکتے ہیں؟

۸۔ کتنی طرح سے ن اشیا ف آدمیوں کو دی جا سکتی ہیں جبکہ ہر ایک آدمی کو کوئی سی تعداد اشیا دی جا سکے؟

۹۔ کتنی طرح سے پانچ اشیا دو آدمیوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں؟

۱۰۔ اگر ذیل کے جملوں کو مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ اُن کے حروف سے کل کتنی مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں (۱) ا^۳ ب^۲ ج^۴ (۲) ا^۲ ب^۵ ج^۲ د؟

۱۱۔ ایک قفلِ ابجد میں تین حلقے ہیں اور ہر ایک حلقے میں پندرہ

مختلف حرف ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے قفل کھولنے کی ناکام کوشش ہوسکتی ہے؟

۱۲۔ پندرہ اضلاع کے کثیرالاضلاع کے تین تین زاویوں کو ملانے سے کل کتنے مثلث بن سکتے ہیں؟

۱۳۔ کسی کتب خانے میں ایک کتاب کے ا نسخے ہیں، دو کتابوں میں سے ہر ایک کے ب، تین کتابوں میں سے ہر ایک کے ج اور د کتابوں کا صرف ایک ایک نسخہ ہے اگر یہ سب کی سب کتابیں اکٹھی پڑھنے کے لیے نکالی جائیں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے تقسیم ہوسکتی ہیں؟

۱۴۔ آٹھ ہندسوں ا، ۲، ۳، ۰، ۴، ۵، ۶، ۷ سے کتنے ایسے اعداد بن سکتے ہیں جو ....۱ سے کم ہوں؟

۱۵۔ کتنی طرح سے ذیل کے انعام ۲۰ لڑکوں کی ایک جماعت میں تقسیم ہوسکتے ہیں۔ عربی کا اول اور دوم، ریاضیات کا اول اور دوم طبیعیات کا اول، اردو کا اول؟

۱۶۔ کتنی طرح سے ۷ آدمی ایک حلقے میں بیٹھ سکتے ہیں اور کتنی طرح سے ۷ انگریز اور ۷ امریکن ایک گول میز کے گرد اس طرح بیٹھ سکتے ہیں کہ کوئی دو امریکن اکھٹے نہ ہوں؟

۱۷۔ کتنی طرح سے ۷ مختلف موتی ایک ہار کی شکل میں پروئے جاسکتے ہیں۔

۱۸۔ کل سات حرف ہیں جن میں سے کچھ ا ہیں اور باقی سب مختلف، اگر ان سب کو اکھٹا ترتیب دیا جائے تو اُن سے کل ۲۱۰ لفظ بنتے ہیں معلوم کرو کہ ا کتنے ہیں۔

۱۹۔ ایک تھیلی میں سات انگریزی سکّے ہیں ساورن، نصف ساورن، کراؤن، فلورن، شلنگ، پنس، فاردنگ، کتنی طرح سے کوئی ایک رقم تھیلی میں سے نکالی جاسکتی ہے؟

۲۰ — ۳ مسلمان ۴ ہندو اور ۲ پارسیوں میں سے کل کتنے انتخاب ہو سکتے ہیں اگر ہر ایک مذہب کا کم از کم ایک آدمی منتخب کیا جائے؟

۲۱ — م ن اشیا کو ن برابر حصوں میں تقسیم کرنے کے کل مختلف طریقے دریافت کرو۔

۲۲ — چار مختلف رنگ کی جھنڈیوں کو ایک دوسری پر اکھٹا کھڑا کرنے سے کل کتنے نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی سی تعداد ایک وقت کھڑی کی جا سکے؟

نیز معلوم کرو کہ ۵ جھنڈیوں سے کتنے نشان بن سکتے ہیں؟

۲۳ — لفظ "امتداد" کے حروف میں سے تین تین حرف کو اکھٹا ترتیب دینے سے کل کتنے حرف بن سکتے ہیں؟

۲۴ — ن خطوطِ مستقیم ایک سطح کو کئی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اگر ان میں سے نہ تو کوئی دو متوازی ہوں اور نہ کوئی تین ایک نقطہ میں ملیں تو سطح کے حصوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۵ — ایک سطح پر ف نقطے ہیں، ان میں سے کوئی تین ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں سوائے ق کے جو سب کے سب ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع ہیں، نقاط کو ملانے سے جو (۱) خطوطِ مستقیم (۲) مثلثات پیدا ہوں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

۲۶ — اگر ن مختلف کتابوں میں سے ہر ایک کتاب کے ف نسخے ہوں تو اُن میں سے کل ممکن انتخابوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۷ — جملہ س ۲ ع ۲ پ ر ک ن د ی کے حروف میں سے چار چار حرف اکھٹے لینے سے جتنے اجتماع اور ترتیبیں بن سکیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

۲۸ — جملہ ا ۳ ن ۲ ی ۲ ع ک م ٹ و کے حروف میں سے چار چار حرف کی ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو۔

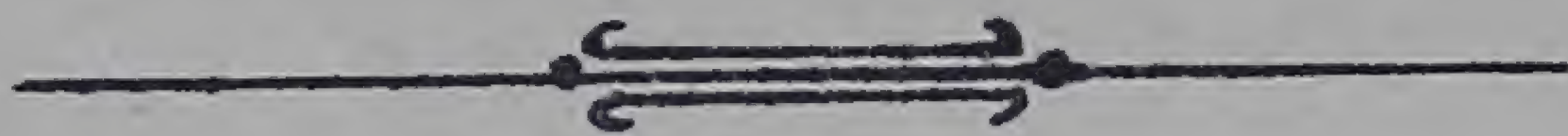
۲۹ — اُن سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو....اسے بڑے

ہوں اور ان ہندسوں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جن میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۰ - ۱۰۰۰۰ سے بڑے اُن سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ہندسوں ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جن میں سے کسی میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۱ - اگر ف + ق + ر اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک طرح کی ہوں ق متشابہ اشیا دوسری طرح کی اور باقی مختلف تو ثابت کرو کہ کل اجتماعوں کی تعداد (ف+۱) (ق+۱) ۲^ر - ۱ ہے۔

۳۲ - ۲ن حروف میں صرف حروف ا اور ب شامل ہیں ثابت کرو کہ ترتیبوں کی تعداد بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب حروف ا کی تعداد حروف ب کی تعداد کے برابر ہو۔

۳۳ - اگر ن + ۱ اعداد ا، ب، ج، د ...... سب مختلف ہوں اور اُن میں سے ہر ایک عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ ا ب ج د ..... میں مختلف اجزائے ضربی کی تعداد (م +۱) ۲^ن - ۱ ہے۔

# باب دوازدہم

## استقرائے حسابیہ

**۱۵۶۔** استقرائے حسابیہ کی مدد سے کسی مسئلۂ عامہ کی صداقت اُس کی کسی خاص صورت سے مستنبط ہوتی ہے، سب سے پہلے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ مسئلۂ مجوزہ چند سادہ صورتوں کے لیے صحیح ہے یا نہیں، اس کے بعد ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر مسئلہ کسی ایک صورت کے لیے درست ہو تو اس سے اگلی صورت کے لیے لازماً درست ہوگا، جب یہ بات بخوبی قائم ہو جائے تو ہمیں معلوم ہوگا کہ اوپر کی تصدیق شدہ سادہ صورتوں سے اگلی صورت کے لیے مسئلہ صحیح ہے اور پھر اس سے اگلی صورت کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس، اس طرح سے بعض اوقات ہم ایسے مسائل اور قوانین حسابیہ کی عمومیت ثابت کر سکتے ہیں جن کا ثبوت کسی طریق راست سے ملنا دشوار ہو۔

امثلۂ ذیل سے اس ترکیب ثبوت کی بخوبی توضیح ہوگی۔

**مثال ۱۔** ثابت کرو کہ پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ $\left\{\frac{ن(ن+1)}{2}\right\}^2$ ہے۔

$\left[\frac{ن(ن+1)}{2}\right]^2$ میں ن کی بجائے عددی قیمتیں ۱یا ۲یا ۳ مندرج

کرنے سے معلوم ہوگا کہ مسئلہ ن = ۱، ۲، ۳ کے لیے صحیح ہے اس سے یہ قیاس پیدا ہوتا ہے کہ شاید ن کی تمام قیمتوں کے لیے یہ مسئلہ صحیح ہو۔

یہ مان لو کہ مسئلہ ن رقموں کے لیے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots \ldots \text{ن رقموں تک} = \left\{\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right\}^۲$$

طرفین میں (ن + ۱) ویں رقم یعنی $(ن + ۱)^۳$ جمع کرو

$$\therefore ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots \ldots (ن + ۱) \text{ رقموں تک}$$

$$= \left\{\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right\}^۲ + (ن+۱)^۳$$

$$= (ن+۱)^۲ \left\{\frac{ن^۲}{۴} + ن + ۱\right\}$$

$$= \frac{(ن+۱)^۲ (ن^۲ + ۴ن + ۴)}{۴}$$

$$= \left\{\frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۲}\right\}^۲$$

اور اس کی صورت وہی ہے جو ہم نے ن رقموں کے مجموعے کے لیے فرض کی تھی صرف فرق یہ ہے کہ ن کی بجائے ن + ۱ لکھا ہوا ہے، دوسرے الفاظ میں یہ ثابت ہوا کہ اگر یہ نتیجہ کسی خاص تعدادِ ارقام کے لیے درست ہو، خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو، تو وہ اس وقت بھی درست ہوگا جبکہ تعدادِ ارقام کو بقدر ایک کے بڑھا دیا جائے۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ نتیجہ تین رقموں کے لیے بھی درست ہے اس لیے معلوم ہوا کہ یہ چار رقموں کے لیے بھی درست ہے اس لیے پانچ رقموں کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس ثابت ہوا کہ یہ نتیجہ بالعموم درست ہے۔

**مثال ۲ —** ن ثنائی اجزائے ضربی (بشکل لا + ا) معلوم ہیں اُن کا حاصلِ ضرب دریافت کرو۔

عمل ضرب سے

(لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) = لا$^{3}$ + (ا + ب + ج) لا$^{2}$
+ (اب + اج + ب ج) لا + اب ج

(لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) (لا + د) = لا$^{4}$ + (ا + ب + ج + د) لا$^{3}$
+ (اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) لا$^{2}$
+ (اب ج + اب د + اج د + ب ج د) لا
+ اب ج د

ہم دیکھتے ہیں کہ ان نتائج سے مفصلۂ ذیل قوانین صادق آتے ہیں۔

۱۔ بائیں طرف کی تعدادِ ارقام دائیں طرف کے اجزائے ضربی کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

۲ پہلی رقم میں لا کا قوت نما اجزائے ضربی کی تعداد کے برابر ہے اور باقی ہر ایک رقم میں لا کا قوت نما رقم ماقبل کے قوت نما سے بقدر ایک کے کم ہے۔

۳۔ پہلی رقم کا سر ایک ہے، دوسری رقم کا سر کل حروف ا، ب، ج، ..... کا مجموعہ ہے، تیسری رقم کا سر انہی حروف میں سے دو دو حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، چوتھی رقم کا سر انہی حروف میں سے تین تین حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور علیٰ ہذا القیاس اور آخری رقم کا سر کل حروف کا حاصلِ ضرب ہے۔

مان لو کہ یہ قوانین ن - ۱ اجزائے ضربی کے لیے درست ہیں۔

یعنی فرض کرو کہ (لا + ا) (لا + ب) ...... (لا + ہ)

= لا$^{ن-1}$ + ض$_{1}$ لا$^{ن-2}$ + ض$_{2}$ لا$^{ن-3}$ + ض$_{3}$ لا$^{ن-4}$ + ...... + ض$_{ن-1}$

جہاں ض$_{1}$ = ا + ب + ج + ......... + ہ

ض$_{2}$ = اب + اج + ...... + اھ + ب ج + ب د + ......

ض$_{3}$ = اب ج + اب د + ......

......

ض$_{ن-۱}$ = اب ج ...... ھ

طرفین کو (لا + ک) میں ضرب دینے سے

(لا + ا) (لا + ب) ...... (لا + ھ) (لا + ک)

= لا$^{ن}$ + (ض$_{1}$ + ک) لا$^{ن-۱}$ + (ض$_{2}$ + ض$_{1}$ ک) لا$^{ن-۲}$

+ (ض$_{3}$ + ض$_{2}$ ک) لا$^{ن-۳}$ + ...... + ض$_{ن-۱}$ ک

اب ض$_{1}$ + ک = (ا + ب + ج + ...... + ھ) + ک

= کل ن حروف ا، ب، ج، ...... ک کا مجموعہ

ض$_{2}$ + ض$_{1}$ ک = ض$_{2}$ + ک (ا + ب + ...... + ھ)

= ن حروف ا، ب، ج، ...... ک میں سے دو دو حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

ض$_{3}$ + ض$_{2}$ ک = ض$_{3}$ + ک (اب + اج + ...... + اھ + ب ج + ......)

= ن حروف ا، ب، ج، ...... ک میں سے تین تین حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ۔

ض$_{ن-۱}$ × ک = کل ن حروف ا، ب، ج، ...... ک کا حاصل ضرب۔

پس معلوم ہوا کہ اگر یہ قوانین اس صورت میں درست ہوں جبکہ صرف (ن - ۱) اجزائے ضربی کو آپس میں ضرب دی جائے تو وہ ن اجزائے ضربی کی صورت میں بھی درست ثابت ہوتے ہیں لیکن ہم نے عمل ضرب سے اوپر ثابت کیا ہے کہ وہ چار اجزائے ضربی کے لیے درست ہیں اس لیے وہ پانچ اجزائے ضربی کے لیے بھی درست ہیں اس لیے چھ کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس یعنی وہ بالعموم

درست ہیں اس لیے

$(لا + ا)(لا + ب)(لا + ج) \ldots\ldots (لا + ک)$

$= لا^{ن} + م_{1} لا^{ن-1} + م_{2} لا^{ن-2} + م_{3} لا^{ن-3} + \ldots\ldots + م_{ن}$

جہاں $م_{1}$ = کل ن حروف ا، ب، ج ........ ک کا مجموعہ

$م_{2}$ = ن حروف میں سے دو دو حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

..........................................

$م_{ن}$ = کل ن حروف کا حاصل ضرب

۱۵۷۔ عمل تقسیم کے متعلق کئی ایسے مسائل ہیں جو استقرائے حسابیہ سے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

**مثال** ۔ ثابت کرو کہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے $لا^{ن} - ا$ جملہ لا - ا پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۔

$$\text{عمل تقسیم سے}\quad \frac{لا^{ن} - ا}{لا - ا} = لا^{ن-1} + \frac{لا^{ن-1} - ا}{لا - ا}$$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر $لا^{ن-1} - ا$، جملہ لا - ا پر پورا تقسیم ہو سکے تو $لا^{ن} - ا$ بھی لا - ا پر پورا تقسیم ہو سکیگا مگر $لا^{1} - ا$ جملہ لا - ا پر پورا تقسیم ہوتا ہے اس لیے $لا^{2} - ا$ بھی لا - ا پر تقسیم ہو سکتا ہے اس لیے $لا^{3} - ا$ بھی اور علیٰ ہذا القیاس پس مسئلہ ثابت ہوا ۔

۱۵۸۔ اس باب کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ ترکیب استقرا صرف انہی مسائل کے ثابت کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن میں طبیعی اعداد ۱، ۲، ۳ ........ ن، کی ترتیب کے موافق مسلسل صورتیں پیدا ہوں ۔

# امثلہ نمبری ۱۲

استقرائے حسابیہ سے ثابت کرو کہ

۱ — $۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲ن - ۱) = ن^{۲}$

۲ — $۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \ldots + ن^{۲}$

$= \frac{۱}{۶} ن (ن + ۱)(۲ن + ۱)$

۳ — $۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \ldots + ۲^{ن} = ۲(۲^{ن} - ۱)$

۴ — $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots$ ن ارقام تک

$= \frac{ن}{ن + ۱}$

۵ — اگر ن جفت ہو تو استقرائے حسابیہ سے ثابت کرو کہ $لا^{ن} - ما^{ن}$ جملہ لا + ما پر پورا پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

# باب سیزدہم

## مسئلہ ثنائی

**۱۵۹**- ضرب دینے سے ظاہر ہے کہ

(لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) (لا + د) = لا$^{4}$ + (ا + ب + ج + د) لا$^{3}$

+ (اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د) لا$^{2}$

+ (اب ج + اب د + اج د + ب ج د) لا + اب ج د ........ (۱)

مگر سرسری نظر سے ہم اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کیونکہ دیے ہوئے چار اجزائے ضربی کا مکمل حاصل ضرب ان جزوی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے جو دائیں طرف کے چار اجزائے ضربی میں ہر ایک سے ایک ایک حرف منتخب کرنے اور ان کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ہم مختلف جزوی حاصل ضربوں کی تکوین پر غور کریں تو معلوم ہوگا کہ

(۱) رقم لا$^{4}$ ہر ایک جزوِ ضربی سے حرف لا لینے سے بنتی ہے

(۲) ارقام جن میں لا$^{3}$ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ تمام ممکن طریقوں سے حرف لا کو کسی تین اجزائے ضربی میں سے منتخب کیا جائے اور ساتھ ہی حروف ا، ب، ج، د میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جزوِ ضربی سے لیا جائے۔

(۳) ارقام جن میں لا$^{2}$ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ حرف لا کو کل ممکن طریقوں سے کسی دو اجزائے ضربی میں سے منتخب کیا جائے

اور ساتھ ہی حروف ا، ب، ج، د میں سے دو حرفوں کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی سے لیا جائے۔

(۴) ارقام جن میں لا شامل ہے حرف لا کو کسی ایک جزو ضربی سے اور حروف ا، ب، ج، د میں سے تین حروف کو باقی ماندہ اجزائے ضربی سے کل ممکن طریقوں سے لینے سے بنتی ہیں۔

(۵) رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو کل حروف ا، ب، ج، د کا حاصل ضرب ہے۔

**مثال ۱** - (لا - ۲) (لا + ۳) (لا - ۵) (لا + ۹)

= لا$^{۴}$ + (-۲ + ۳ - ۵ + ۹) لا$^{۳}$ + (-۶ + ۱۰ - ۱۸ - ۱۵ + ۲۷ - ۴۵) لا$^{۲}$

+ (۳۰ - ۵۴ + ۹۰ - ۱۳۵) لا + ۲۷۰

= لا$^{۴}$ + ۵ لا$^{۳}$ - ۴۷ لا$^{۲}$ - ۶۹ لا + ۲۷۰

**مثال ۲** - حاصل ضرب (لا - ۳) (لا + ۵) (لا - ۱) (لا + ۲) (لا - ۸) میں لا$^{۳}$ کا عددی سر دریافت کرو۔

ارقام جن میں لا$^{۳}$ شامل ہے کسی تین اجزائے ضربی کے حروف "لا" کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی کی دو عددی مقادیر کے ساتھ ضرب دینے سے بنتی ہیں۔ اس لیے عددی سر مطلوب مقادیر -۳، ۵، -۱، ۲، -۸ میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مجموعے برابر ہے۔

سر مطلوب = -۱۵ + ۳ - ۶ + ۲۴ - ۵ + ۱۰ - ۴۰ - ۲ + ۸ - ۱۶

= -۳۹

**۱۹۰** - اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں فرض کریں کہ

ب = ج = د = ا تو حاصل ہوگا

(لا + ا)$^{۴}$ = لا$^{۴}$ + ۴ ا لا$^{۳}$ + ۶ ا$^{۲}$ لا$^{۲}$ + ۴ ا$^{۳}$ لا + ا$^{۴}$

ایک عام نتیجے سے اس کی خاص صورت مستنبط کرنے کی ترکیب جو اوپر بیان ہوئی اکثر علم ریاضی میں کام آتی ہے کیونکہ کئی مرتبہ

ایک مسئلۂ عامہ کا ثابت کرنا اُس کی خاص صورتوں کے ثابت کرنے سے زیادہ آسان ہوتا ہے۔ دفعۂ ذیل میں ہم مسئلۂ ثنائی کو اسی طریقے سے ثابت کرینگے۔ مسئلۂ مذکورہ کی استعانت سے جملہ ثنائی جس کی صورت عامہ لا+اُ ہے کسی مثبت صحیح قوت پر اٹھایا جاسکتا ہے۔

**۱۶۱۔** اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ (لا+ا)^ن کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

جملہ (لا+ا) (لا+ب) (لا+ج) . . . . . (لا+ک) پر غور کرو اس میں اجزائے ضربی کی تعداد ن ہے۔

جملۂ مذکورہ کی صورتِ تفصیلی ن اجزائے ضربی لا+اُ لا+ب، لا+ج، . . . . . . لا+ک کا متواتر حاصل ضرب ہے اور اس میں ہر ایک رقم کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے کیونکہ یہ رقم ن حروف کے باہم ضرب ہونے سے اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ مندرجۂ بالا ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے صرف ایک ایک حرف کو منتخب کیا جائے۔

لا کی سب سے اعلیٰ قوت لا^ن ہے اور یہ ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک سے حرف لا لینے اور ان سب کو اکھٹا ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

وہ ارقام جن میں لا^ن-۱ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں:—

حرف لا کو کسی ن-۱ اجزائے ضربی سے لو اور حروف اُ، ب، ج، د، . . . . ک میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جزو ضربی سے لے کر ان سب حروف کو اکھٹا ضرب دو، اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لا^ن-۱ کا سر حروف اُ، ب، ج، د، . . . . . . ک کے مجموعے کے برابر ہوگا اس کو ص۱ سے تعبیر کرو۔

ارقام جن میں لا^ن-۲ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں:—

حرف لا کو کسی ن-۲ اجزائے ضربی سے لو اور حروف اُ، ب، ج، د، . . . ک

میں سے دو حروف کو دو باقی ماندہ اجزائے ضربی سے لے کر اُن سب کو
اکھٹا ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں $لا^{ن-۲}$ کا سرِ حروف
ا، ب، ج، د، ......... ک میں سے دو دو حروف کے حاصل ضرب
کے مجموعے کے برابر ہوگا، اس کو $ص_۲$ سے تعبیر کرو۔

اور بالعموم ارقام جن میں $لا^{ن-ر}$ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں:—
حرف لا کو کسی ن - ر اجزائے ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د،.... ک
میں سے ر حروف کو باقی ماندہ ر اجزائے ضربی سے لے کر ان سب کو
اکھٹا ضرب دو، اِس طرح سے آخری حاصلِ ضرب میں $لا^{ن-ر}$ کا سر
حروف ا، ب، ج، د،....... ک میں سے ر، ر حروف کے حاصلِ ضرب
کے مجموعے کے برابر ہوگا، اس کو $ص_ر$ سے تعبیر کرو۔

آخری حاصلِ ضرب میں رقمِ آخر ا ب ج ..... ک ہے،
اس کو $ص_ن$ سے تعبیر کرو۔

اس لیے (لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) ...... (لا + ک)

$$= لا^ن + ص_۱ لا^{ن-۱} + ص_۲ لا^{ن-۲} + ..... + ص_ر لا^{ن-ر} + ..... + ص_{ن-۱} لا + ص_ن$$

$ص_۱$ میں رقموں کی تعداد ن ہے، $ص_۲$ میں رقموں کی تعداد وہی ہے
جو ن اشیا میں سے دو دو اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہے یعنی
${}_نج_۲$، $ص_۳$ میں رقموں کی تعداد ${}_نج_۳$ ہے اور علیٰ ہذا القیاس

اب فرض کرو کہ حروف ب، ج، ..... ک میں سے ہر ایک
ا کے برابر ہے۔ اس صورت میں

$ص_۱ = {}_نج_۱ ا$، $ص_۲ = {}_نج_۲ ا^۲$، $ص_۳ = {}_نج_۳ ا^۳$ اور علیٰ ہذا القیاس، پس

$$(لا + ا)^ن = لا^ن + {}_نج_۱ ا لا^{ن-۱} + {}_نج_۲ ا^۲ لا^{ن-۲} + {}_نج_۳ ا^۳ لا^{ن-۳} + .... + {}_نج_ن ا^ن$$

اور ${}_نج_۱$، ${}_نج_۲$ ......... کی جگہ ان کی قیمتیں رکھنے سے

$$(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن ا لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۳\times۲\times۱}\,\text{ا}^{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \cdots\cdots + \text{ا}^{\text{ن}}$$

اس سلسلہ میں تعداد ارقام ن + ۱ ہے

ضابطہ مندرجۂ بالا کو مسئلۂ ثنائی کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور بائیں طرف کے سلسلہ کو $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ کی صورتِ تفصیلی کہتے ہیں۔

نتیجۂ صریح — ا کی جگہ (-ا) رکھنے سے

$$\{\text{لا}+(-\text{ا})\}^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}(-\text{ا}) + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}(-\text{ا})^{۲}$$

$$+ {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}(-\text{ا})^{۳} + \cdots\cdots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}(-\text{ا})^{\text{ن}}$$

$$\text{یعنی}\ (\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ا}^{۲}$$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۳\times۲\times۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{ا}^{۳} + \cdots\cdots + (-\text{ا})^{\text{ن}}$$

پس معلوم ہوا کہ ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور رقم آخر مثبت ہوگی اگر ن جفت ہو اور منفی ہوگی اگر ن طاق ہو۔

نتیجۂ صریح ۲ — لا کی جگہ ایک اور ا کی جگہ لا رکھنے سے

$$(۱+\text{لا})^{\text{ن}} = ۱ + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۳}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= ۱ + \text{ن لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۳\times۲\times۱}\,\text{لا}^{۳} + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}}$$

اسی طرح سے $(۱-\text{لا})^{\text{ن}}$

$$= ۱ - \text{ن لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{لا}^{۲} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۳\times۲\times۱}\,\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots + (-\text{لا})^{\text{ن}}$$

**نتیجۂ صریح ۳** — چونکہ $(لا + ا)^{ن} = \{لا(۱ + \frac{ا}{لا})\}^{ن} = لا^{ن}(۱ + \frac{ا}{لا})^{ن}$

اس لیے

$$(لا + ا)^{ن} = لا^{ن}\{۱ + ن\frac{ا}{لا} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\times\frac{ا^{۲}}{لا^{۲}} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱}\times\frac{ا^{۳}}{لا^{۳}} + \text{وغیرہ}\}$$

اسی طرح سے

$$(لا - ا)^{ن} = لا^{ن}\{۱ - ن\times\frac{ا}{لا} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\times\frac{ا^{۲}}{لا^{۲}} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱}\times\frac{ا^{۳}}{لا^{۳}} + \text{وغیرہ}\}$$

**۱۶۲** — مسئلہ ثنائی ثبت صحیح قوت نما کی صورت میں استقرائے حسابیہ سے اس طرح ثابت ہو سکتا ہے ۔

مسئلہ کی صداقت قوت نما ن کے لیے مان لو

یعنی مان لو کہ

$$(لا + ا)^{ن} = لا^{ن} + {}_{ن}ج_{۱}\, ا\, لا^{ن-۱} + {}_{ن}ج_{۲}\, ا^{۲} لا^{ن-۲} + \cdots + {}_{ن}ج_{ر}\, ا^{ر} لا^{ن-ر} + \cdots$$

جہاں

$${}_{ن}ج_{ر} = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots(ن-ر+۱)}{|ر}$$

طرفین کو لا + ا میں ضرب دینے سے

$$(لا + ا)^{ن+۱} = لا^{ن+۱} + {}_{ن}ج_{۱}\, ا\, لا^{ن} + {}_{ن}ج_{۲}\, ا^{۲} لا^{ن-۱} + \cdots + {}_{ن}ج_{ر}\, ا^{ر} لا^{ن-ر+۱} + \cdots$$

$$+ ا\, لا^{ن} + {}_{ن}ج_{۱}\, ا^{۲} لا^{ن-۱} + \cdots + {}_{ن}ج_{ر-۱}\, ا^{ر} لا^{ن-ر+۱} + \cdots$$

$$= لا^{ن+۱} + ({}_{ن}ج_{۱} + ۱)\, ا\, لا^{ن} + ({}_{ن}ج_{۲} + {}_{ن}ج_{۱})\, ا^{۲} لا^{ن-۱} + \cdots\cdots$$

$+ \ldots\ldots + ({}_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱})\,د^{ر}\,لا^{ن-ر+۱}$

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ ${}_{ن}ج_{ر} + {}_{ن}ج_{ر-۱} = {}_{ن+۱}ج_{ر}$ [دفعہ ۱۵۱]

اب اس میں بالترتیب ر = ۱، ۲، ۳ ......... رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$${}_{ن}ج_{۱} + ۱ = {}_{ن}ج_{۱} + {}_{ن}ج_{۰} = {}_{ن+۱}ج_{۱}$$

$${}_{ن}ج_{۲} + {}_{ن}ج_{۱} = {}_{ن+۱}ج_{۲}$$

$${}_{ن}ج_{۳} + {}_{ن}ج_{۲} = {}_{ن+۱}ج_{۳}$$

اور علیٰ ہذا القیاس

$$\therefore (لا + د)^{ن+۱} = لا^{ن+۱} + {}_{ن+۱}ج_{۱}\,د\,لا^{ن} + {}_{ن+۱}ج_{۲}\,د^{۲}\,لا^{ن-۱} + \ldots\ldots$$

$$+ {}_{ن+۱}ج_{ر}\,د^{ر}\,لا^{ن-ر+۱} + \ldots\ldots$$

پس معلوم ہوا کہ اگر مسئلہ قوت نما ن کے لیے صحیح ہو تو یہ قوت نما ن + ۱ کے لیے بھی صحیح ہوتا ہے لیکن یہ قوت نما ۲ کے لیے صحیح ہے کیونکہ $(لا + د)^{۲} = لا^{۲} + ۲\,د\,لا + \frac{۱ \times ۲}{۲ \times ۱} د^{۲}$

$$= لا^{۲} + ۲\,د\,لا + د^{۲}$$

اس لیے مسئلہ قوت نما ۳ کے لیے صحیح ہے۔

اس لیے مسئلہ قوت نما ۴ کے لیے صحیح ہے اور علیٰ ہذا القیاس ثابت ہوا کہ مسئلۂ ثنائی تمام مثبت صحیح قوت نماؤں کے لیے صحیح ہے

۱۶۳۔ مسئلۂ ثنائی کا ایک عمدہ مختصر ثبوت یہ بھی ہے

$(لا + د)^{ن} = (لا + د)(لا + د)(لا + د) \ldots\ldots$ ن اجزائے ضربی تک

ظاہر ہے کہ مندرجۂ بالا ن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ان ویں درجہ کا ایک متجانس جملہ ہے اور اس کی ہر رقم ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک سے ایک اور صرف ایک حرف لے کر ان سب کو آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

پس ہر ایسی رقم جس میں $لا^{ن-ر} ا^{ر}$ شامل ہو اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ کسی ر اجزائے ضربی سے حرف ا اور باقی ماندہ ن - ر اجزائے ضربی میں سے حرف لا لے کر ان سب حروف کو اکھٹا ضرب دیا جائے۔

پس معلوم ہوا کہ جن ارقام میں $لا^{ن-ر} ا^{ر}$ شامل ہے ان کی تعداد ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے برابر ہے اس لیے $لا^{ن-ر} ا^{ر}$ کا سر $ن ج_{ر}$ ہے اور ر کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ... ن بالترتیب دینے سے سب رقموں کے سر حاصل ہوتے ہیں۔

$$\therefore (لا + ا)^{ن} = لا^{ن} + ن ج_{۱} لا^{ن-۱} ا + ن ج_{۲} لا^{ن-۲} ا^{۲} + \ldots + ن ج_{ر} لا^{ن-ر} ا^{ر} + \ldots\ldots + ا^{ن}$$

$$= لا^{ن} + ن لا^{ن-۱} ا + \frac{ن(ن-۱)}{۱.۲} لا^{ن-۲} ا^{۲} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)\ldots(ن-ر+۱)}{|ر} لا^{ن-ر} ا^{ر} + \ldots\ldots + ا^{ن}$$

مثال (۱) - $(لا + ما)^{۶}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

مسئلۂ ثنائی کی مدد سے

$$(لا + ما)^{۶} = لا^{۶} + ۶ج_{۱} لا^{۵} ما + ۶ج_{۲} لا^{۴} ما^{۲} + ۶ج_{۳} لا^{۳} ما^{۳} + ۶ج_{۴} لا^{۲} ما^{۴} + ۶ج_{۵} لا ما^{۵} + ۶ج_{۶} ما^{۶}$$

اور $۶ج_{۱}$، $۶ج_{۲}$، $۶ج_{۳}$ کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$= لا^{۶} + ۶ لا^{۵} ما + ۱۵ لا^{۴} ما^{۲} + ۲۰ لا^{۳} ما^{۳} + ۱۵ لا^{۲} ما^{۴} + ۶ لا ما^{۵} + ما^{۶}$$

مثال (۲)۔ $(ا - ۲لا)^{۷}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

$$(ا - ۲لا)^{۷} = ا^{۷} - {}_{۷}ج_{۱}\, ا^{۶}(۲لا) + {}_{۷}ج_{۲}\, ا^{۵}(۲لا)^{۲}$$
$$- {}_{۷}ج_{۳}\, ا^{۴}(۲لا)^{۳} + \ldots\ldots\ldots$$ ۸ رقموں تک

اب چونکہ ${}_{ن}ج_{ر} = {}_{ن}ج_{ن-ر}$ اس لیے اگر صرف ${}_{۷}ج_{۳}$ تک سر دریافت کیے جائیں تو باقی فوراً لکھے جا سکتے ہیں کیونکہ

${}_{۷}ج_{۴} = {}_{۷}ج_{۳}$ اور ${}_{۷}ج_{۵} = {}_{۷}ج_{۲}$ وغیرہ اس لیے

$$(ا - ۲لا)^{۷} = ا^{۷} - ۷ا^{۶}(۲لا) + \frac{۷\times۶}{۱\times۲}ا^{۵}(۲لا)^{۲}$$
$$- \frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳}ا^{۴}(۲لا)^{۳} + \ldots\ldots\ldots$$
$$= ا^{۷} - ۷ا^{۶}(۲لا) + ۲۱ا^{۵}(۲لا)^{۲} - ۳۵ا^{۴}(۲لا)^{۳}$$
$$+ ۳۵ا^{۳}(۲لا)^{۴} - ۲۱ا^{۲}(۲لا)^{۵} + ۷ا(۲لا)^{۶} - (۲لا)^{۷}$$
$$= ا^{۷} - ۱۴ا^{۶}لا + ۸۴ا^{۵}لا^{۲} - ۲۸۰ا^{۴}لا^{۳} + ۵۶۰ا^{۳}لا^{۴}$$
$$- ۶۷۲ا^{۲}لا^{۵} + ۴۴۸ا\,لا^{۶} - ۱۲۸لا^{۷}$$

مثال (۳) ۔ $(ا + \sqrt{ا^{۲}-۱})^{۷} + (ا - \sqrt{ا^{۲}-۱})^{۷}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مثال میں ایسی دو تفصیلی صورتیں ہیں جن کی ارقام عددی قیمت میں برابر ہیں لیکن دوسری تفصیلی صورت میں دوسری، چوتھی، چھٹی، آٹھویں رقمیں منفی ہیں اور اس لیے پہلی صورت تفصیلی کی رقوم متماثلہ کو نابود کر دیتی ہیں۔

اس لیے مطلوبہ قیمت $= ۲\{ا^{۷} + ۲۱ا^{۵}(ا^{۲}-۱) + ۳۵ا^{۳}(ا^{۲}-۱)^{۲}$
$+ ۷ا(ا^{۲}-۱)^{۳}\}$

$$= ۲ا(۶۴ا^{۶} - ۱۱۲ا^{۴} + ۵۶ا^{۲} - ۷)$$

۱۶۴ ۔ $(لا + ا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

دوسری رقم = $ن ج_۱ \, لا^{ن-۱} \, ا$

تیسری رقم = $ن ج_۲ \, لا^{ن-۲} \, ا^۲$

چوتھی رقم = $ن ج_۳ \, لا^{ن-۳} \, ا^۳$

پانچویں رقم = $ن ج_۴ \, لا^{ن-۴} \, ا^۴$

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک رقم میں ج کا عدد آخر اُس رقم کی تعداد سے جو شروع سلسلہ سے اُس رقم تک ہو، بقدر ایک کے کم ہے اور ا کا قوت نما وہی ہے جو ج کا عدد آخر ہے نیز لا اور ا کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے۔ اس لیے (ر + ۱) ویں رقم = $ن ج_ر \, لا^{ن-ر} \, ا^ر$

اس کو سلسلہ کی رقم عامہ کہتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اس میں ر کو مناسب عددی قیمتیں دینے سے ہم صورت تفصیلی کی کوئی سی رقم دریافت کر سکتے ہیں۔

پس (ر + ۱) ویں رقم

$$= ن ج_ر \, لا^{ن-ر} \, ا^ر$$

$$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ر+۱)}{\underline{|ر}} \, لا^{ن-ر} \, ا^ر$$

اگر $(لا - ا)^ن$ کی رقم عامہ مطلوب ہو تو ہمیں ا کی بجائے (- ا) لکھنا چاہیے

## مثال (۱)۔ $(ا + ۲ لا^۳)^{۱۷}$ کی پانچویں رقم دریافت کرو۔

رقم مطلوبہ = $_{۱۷}ج_۴ \, ا^{۱۳} \times (۲ لا^۳)^۴$

$$= \frac{۱۴\times۱۵\times۱۶\times۱۷}{۴\times۳\times۲\times۱}\times ۱۶\ د^{۱۳}\ لا^{۴}$$

$$= ۳۸۰۸۰\ د^{۱۳}\ لا^{۴}$$

مثال (۲)۔ $(د - لا)^{۵۰}$ کی ۴۹ ویں رقم دریافت کرو۔

رقم مطلوبہ $= {}_{۵۰}ج_{۴۸}\ د^{۲}\ (-لا)^{۴۸}$

$$= {}_{۵۰}ج_{۲}\ د^{۲}\ (-لا)^{۴۸}$$

$$= \frac{۴۹\times۵۰}{۲\times۱}\ د^{۲}\ (-لا)^{۴۸}$$

$$= ۱۲۲۵\ د^{۲}\ لا^{۴۸}$$

مثال (۳)۔ $\left(ما^{۲} + \frac{س^{۳}}{ما}\right)^{۵}$ کی صورت تفصیلی میں ما کا سر دریافت کرو۔

فرض کرو جملۂ مذکور کے پھیلاؤ کی (ر + ۱) ویں رقم میں ما واقع ہوتا ہے۔

چونکہ (ر + ۱) ویں رقم $= {}_{۵}ج_{ر}\ (ما^{۲})^{۵-ر} \left(\frac{س^{۳}}{ما}\right)^{ر}$

$$= {}_{۵}ج_{ر}\ س^{۳ر}\ ما^{۱۰-۳ر}$$

اور اگر اس میں ما کی صرف پہلی قوت شامل ہو تو ضروری ہے کہ

$$۱۰ - ۳ر = ۱ \quad یعنی\ ر = ۳$$

اس لیے سر مطلوب $= {}_{۵}ج_{ر} \times س^{۳ر}$

$$= {}_{۵}ج_{۳} \times س^{۳\times۳}$$

$$= {}_{۵}ج_{۳} \times س^{۹}$$

$$= ۱۰\ س^{۹}$$

مثال (۴)۔ $(لا^{۲} - ۲لا)^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۱۶}$ کا سر دریافت کرو

اب $(لا^{۲} - ۲لا)^{۱۰} = لا^{۲۰}\left(۱ - \frac{۲}{لا}\right)^{۱۰}$

اور چونکہ $(1 - \frac{2}{لا^2})^{10}$ کی صورت تفصیلی کی ہر ایک رقم کو $لا^2$ سے ضرب دینی پڑتی ہے اس لیے ہمیں اس صورت تفصیلی میں اس رقم کا سر دریافت کرنا ہے جس میں $\frac{1}{لا^8}$ شامل ہو۔

اس لیے سر مطلوب $= {}_{10}ج_4 (-2)^4$

$$= 16 \times \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 3360$$

مثال (۵)۔ $(لا - \frac{1}{لا^2})^{3ن}$ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

فرض کرو کہ (ر + ۱) ویں رقم میں لا شامل نہیں ہوتا۔

تب چونکہ (ر + ۱) ویں رقم

$$= {}_{3ن}ج_ر \times لا^{3ن - ر} \times (-\frac{1}{لا^2})^ر$$

$$= {}_{3ن}ج_ر \times (-1)^ر \times لا^{3ن - 3ر}$$

اس لیے لازماً ۳ن - ۳ر = ۰ اور اس لیے ر = ن

پس رقم مطلوبہ $= {}_{3ن}ج_ر \times (-1)^ر$

$$= {}_{3ن}ج_ن \times (-1)^ن$$

$$= (-1)^ن \times \frac{\lfloor 3ن}{\lfloor ن \lfloor 2ن}$$

مثال (۶)۔ $(لا^2 + \frac{1}{لا^3})^ن$ کی صورت تفصیلی میں $لا^ل$ کا سر دریافت کرو

فرض کرو کہ صورت تفصیلی کی (ع + ۱) ویں رقم میں $لا^ر$ واقع ہوتا ہے۔

$$\text{تب (ع + ۱) ویں رقم} = {}_ن ج_ع \left(لا^۲\right)^{ن-ع} \left(\frac{۱}{لا^۳}\right)^ع$$

$$= {}_ن ج_ع \; لا^{۲ن-۵ع}$$

لیکن جیسا ہم نے فرض کیا کہ اس رقم میں $لا^ر$ شامل ہوتا ہے اس لیے

$$۲ن - ۵ع = ر \quad \text{یا} \quad ع = \frac{۲ن - ر}{۵}$$

$$\text{پس سر مطلوب} = {}_ن ج_ع = {}_ن ج_{\frac{۲ن-ر}{۵}}$$

$$= \frac{|ن}{|\frac{۱}{۵}(۲ن - ر) \; |\frac{۱}{۵}(۳ن + ر)}$$

اگر $\frac{۲ن - ر}{۵}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو صورت تفصیلی میں ایسی کوئی رقم نہ ہوگی جس میں $لا^ر$ شامل ہو۔

## امثلہ نمبری ۱۳۱

ذیل کے ثنائی جملوں کو پھیلاؤ

۱- $(لا - ۳)^۵$ ۲- $(۳لا + ۲ما)^۴$

۳- $(۲لا - ما)^۵$ ۴- $(۱ - ۳ی^۲)^۶$

۵- $(لا^۲ + لا)^۵$ ۶- $(۱ - لا ما)^۷$

۷- $\left(۲ - \frac{۳لا^۲}{۲}\right)^۴$ ۸- $\left(۳ی - \frac{۲}{۳}\right)^۶$

۹- $\left(۱ + \frac{لا}{۲}\right)^۷$ ۱۰- $\left(\frac{۲}{۳}لا - \frac{۳}{۲لا}\right)^۶$

۱۱- $\left(\frac{۱}{۲} + ی\right)^۸$ ۱۲- $\left(۱ - \frac{۱}{لا}\right)^{۱۰}$

۱۳- $(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}} + $ (ایسی ارقام جن میں جزو ضربی ن شامل ہے) $+ \text{لا}^{\text{ن}}$

اس میں فرض کرو کہ ن = ۰ تو $(\text{ا} + \text{لا})^{0} = \text{ا}^{0} + 0 + \text{لا}^{0}$ یعنی $1 = 1 + 1$، معلوم کرو کہ غلطی کہاں ہے؟

ذیل کے جملوں کی ارقام مطلوبہ کو لکھو اور مختصر کرو۔

۱۴- $(\text{لا} - 5)^{13}$ کی چوتھی رقم

۱۵- $(1 - 2\text{لا})^{12}$ کی دسویں رقم

۱۶- $(2\text{لا} - 1)^{13}$ کی بارھویں رقم

۱۷- $(5\text{لا} + 8\text{ما})^{30}$ کی ۲۸ ویں رقم

۱۸- $(\frac{\text{ا}}{2} + 9\text{ب})^{10}$ کی چوتھی رقم

۱۹- $(2\text{ا} - \frac{\text{ب}}{2})^{8}$ کی پانچویں رقم

۲۰- $(\frac{4\text{لا}}{5} - \frac{5}{2\text{لا}})^{9}$ کی ساتویں رقم

۲۱- $(\frac{\text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\text{ما}^{\frac{5}{2}}}{\text{ب}^{\frac{3}{2}}})^{8}$ کی پانچویں رقم

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۲- $(\text{لا} + \sqrt{2})^{4} + (\text{لا} - \sqrt{2})^{4}$

۲۳- $(\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}} + \text{لا})^{5} - (\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}} - \text{لا})^{5}$

۲۴- $(\sqrt{2} + 1)^{6} - (\sqrt{2} - 1)^{6}$

۲۵- $(2 - \sqrt{1 - \text{لا}})^{6} + (2 + \sqrt{1 - \text{لا}})^{6}$

۲۶- $(\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}})^{10}$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۷- $(1 - \frac{\text{لا}^{2}}{2})^{14}$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۸- $(3\text{ا} - \frac{\text{ا}^{3}}{6})^{9}$ کی دو درمیانی رقمیں دریافت کرو

۲۹۔ $\left(\text{لا}^{2} + \frac{3\text{د}}{\text{لا}}\right)^{15}$ میں $\text{لا}^{18}$ کا سر دریافت کرو۔

۳۰۔ $\left(\text{د لا}^{4} - \text{ب لا}\right)^{9}$ میں $\text{لا}^{18}$ کا سر دریافت کرو۔

۳۱۔ $\left(\text{لا}^{4} - \frac{1}{\text{لا}^{3}}\right)^{15}$ میں $\text{لا}^{32}$ اور $\text{لا}^{-17}$ کے سر دریافت کرو۔

۳۲۔ $\left(9\text{لا} - \frac{1}{3\sqrt{\text{لا}}}\right)^{18}$ کی ۱۳ویں رقم دریافت کرو۔

۳۳۔ $\left(\frac{3}{2}\text{لا}^{2} - \frac{1}{3\text{لا}}\right)^{9}$ کی وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

۳۴۔ اگر $\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ واقع ہو تو اس کا سر دریافت کرو۔

۳۵۔ $\left(\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}^{2}}\right)^{3\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

۳۶۔ اگر $\left(\text{لا}^{2} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ع}}$ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کا سر $= \dfrac{\underline{|2\text{ن}}}{\underline{|\frac{1}{3}(4\text{ن} - \text{ع})}\ \underline{|\frac{1}{3}(2\text{ن} + \text{ع})}}$

۱۶۵۔ $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں شروع اور اخیر سے متساوی الفصل رقموں کے سر برابر ہوتے ہیں۔

شروع $(\text{ر} + 1)$ ویں رقم کا سر $= {}_{\text{ن}}\text{ح}_{\text{ر}}$

ظاہر ہے کہ اخیر سے $(\text{ر} + 1)$ ویں رقم کے پہلے $\text{ن} + 1 - (\text{ر} + 1)$ یا $\text{ن} - \text{ر}$ رقمیں ہوں گی اس لیے اخیر سے $(\text{ر} + 1)$ ویں رقم شروع سے

(ن - ر + ۱) ویں رقم ہوگی اور اس کا سر ن ج ن - ر ہوگا۔

اب چونکہ ن ج ن - ر = ن ج ر ، اس لیے مسئلہ ثابت ہوا۔

۱۶۶- (۱ + لا)^ن کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑا سر دریافت کرو۔

(۱ + لا)^ن کی رقم عامہ کا سر ن ج ر ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ر کی کس قیمت کے لیے اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔
بموجب دفعہ ۱۴۹ اگر ن جفت ہو تو سب سے بڑا سر ن ج ن/۲ ہے۔

اور اگر ن طاق ہو تو سب سے بڑا سر ن ج (ن-۱)/۲ یا ن ج (ن+۱)/۲ ہے۔

اور یہ دونوں سر آپس میں برابر ہیں

۱۶۷- (لا + ی)^ن کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

(لا + ی)^ن = لا^ن (۱ + ی/لا)^ن

چونکہ لا^ن سے جملہ (۱ + ی/لا)^ن کی ہر ایک رقم ضرب دی جاتی ہے۔
اس لیے کافی ہوگا کہ ہم صرف جملہ (۱ + ی/لا)^ن کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کریں۔

اگر ق ر اور ق ر+۱ اس جملہ کی ر ویں اور (ر + ۱) ویں رقموں کو بالترتیب تعبیر کریں تو ق ر+۱ = ق ر × (ن - ر + ۱)/ر × ی/لا

= ق ر × ((ن + ۱)/ر - ۱) ی/لا

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ر بڑھتا ہے ویسے جزو ضربی ((ن + ۱)/ر - ۱) گھٹتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ (ر + ۱) ویں رقم ر ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہو سکتی لیکن اس وقت تک ضرور بڑی رہتی ہے جب تک کہ

$(\frac{ن+1}{ر}-1)\frac{د}{لا}$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

اب $(\frac{ن+1}{ر}-1)\frac{د}{لا}>1$

جب تک کہ $(\frac{ن+1}{ر}-1)>\frac{لا}{د}$

یعنی $\frac{ن+1}{ر}>\frac{لا}{د}+1$

یا $\frac{ن+1}{\frac{لا}{د}+1}>ر$ ............(۱)

اگر $\frac{ن+1}{\frac{لا}{د}+1}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ع سے تعبیر کرو

اب اگر ر = ع تو ضارب جزو ضربی $\frac{ن-ر+1}{ر}(\frac{د}{لا})$ ایک کے برابر ہو جاتا ہے اور (ع + ۱) ویں رقم ع ویں رقم کے برابر ہے اور یہی دو رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{ن+1}{\frac{لا}{د}+1}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ک سے تعبیر کرو

اب ر کی بڑی سے بڑی قیمت جو غیر مساوات (۱) کے مطابق ہے۔ صریحاً ک ہے پس معلوم ہوا کہ (ک + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے چونکہ ہمیں بلحاظ عددی قیمت کے سب سے بڑی رقم مطلوب ہے اس لیے جملہ $(لا-د)^ن$ کے لیے بھی اوپر کا ثبوت کافی ہوگا۔ پس کسی مثال حسابیہ میں جملہ ثنائی کی دوسری رقم کی علامت کا خیال رکھنا ضروری نہیں ہے۔ بہتر ہوگا کہ ہر ایک مثال بغیر قاعدۂ عامہ کی مدد کے نکالی جائے۔

مثال (۱)۔ اگر لا = $\frac{1}{2}$ تو $(1+4لا)^ن$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

ر ویں اور (ر + ۱) ویں رقموں کو بالترتیب $\text{ق}_{\text{ر}}$ اور $\text{ق}_{\text{ر}+۱}$ سے تعبیر کرو، تب

$$\text{ق}_{\text{ر}+۱} = \frac{۸ - \text{ر} + ۱}{\text{ر}} \times ۴\,\text{لا} \times \text{ق}_{\text{ر}}$$

$$= \frac{۹ - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۴}{۳} \times \text{ق}_{\text{ر}}$$

اس لیے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} > \text{ق}_{\text{ر}}$

جب تک کہ $\frac{۹ - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۴}{۳} > ۱$

یعنی $۳۶ - ۴\text{ر} > ۳\text{ر}$

یا $۳۶ > ۷\text{ر}$

ر کی بڑی سے بڑی قیمت جو اس غیر مساوات کو پورا کرتی ہے، ۵ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چھٹی رقم سب سے بڑی ہے اور اس کی قیمت

$$= {}_{۸}\text{ج}_{۵} \times \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۵} = {}_{۸}\text{ج}_{۳} \times \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۵}$$

$$= \frac{۵۷۳۴۴}{۲۴۳}$$

مثال (۲)۔ اگر $\text{لا} = \frac{۱}{۴}$ تو $(۲ + ۳\,\text{لا})^{۹}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(۲ + ۳\,\text{لا})^{۹} = ۲^{۹}\left(۱ + \frac{۳\,\text{لا}}{۲}\right)^{۹}$$

اس لیے اگر ر ویں اور (ر + ۱) ویں رقموں کو بالترتیب $\text{ق}_{\text{ر}}$ اور $\text{ق}_{\text{ر}+۱}$ سے تعبیر کریں تو

$$\text{ق}_{\text{ر}+۱} = \frac{۹ \times ۸ \times \cdots\cdots (۹ - \text{ر} + ۱)}{\lfloor \text{ر}} \times \left(\frac{۳\,\text{لا}}{۲}\right)^{\text{ر}} \times ۲^{۹}$$

$$= \frac{۱۰ - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۳\,\text{لا}}{۲} \times \text{ق}_{\text{ر}}$$

اس لیے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} > \text{ق}_\text{ر}$

جب تک کہ $\frac{۱۰-\text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۳\text{لا}}{۲} > ۱$

یعنی $\frac{۱۰-\text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۳}{۸} > ۱$

یا $\frac{۳۰}{۱۱} > \text{ر}$

اس غیر مساوات کے موافق ر کی بڑی سے بڑی قیمت ۲ ہے، اس لیے معلوم ہوا کہ تیسری رقم سب سے بڑی ہے اور اس کی قیمت

$$= ۲^۹ \times \frac{۹\times۸}{۲\times۱} \times \left(\frac{۳\text{لا}}{۲}\right)^۲ = ۲^۹ \times \frac{۹\times۸}{۲\times۱} \times \frac{۳^۲}{۸^۲}$$

$$= \frac{۸۱\times۲^۹}{۲^۴} = ۲۵۹۲$$

**مثال (۳)**۔ اگر لا = ۱ تو $(۳ - ۲\text{لا})^۹$ کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(۳-۲\text{لا})^۹ = ۳^۹\left(۱-\frac{۲\text{لا}}{۳}\right)^۹$$

پس $\left(۱-\frac{۲\text{لا}}{۳}\right)^۹$ کی صورت تفصیلی پر ہی غور کرنا کافی ہوگا اس جگہ

بلحاظ عددی قیمت کے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} = \frac{۹-\text{ر}+۱}{\text{ر}} \times \frac{۲\text{لا}}{۳} \times \text{ق}_\text{ر}$ عدداً

$$= \frac{۱۰-\text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۲}{۳} \times \text{ق}_\text{ر}$$

اس لیے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} > \text{ق}_\text{ر}$

جب تک کہ $\frac{۱۰-\text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{۲}{۳} > ۱$

یعنی $۲۰ > ۵\text{ر}$

اس لیے ر = ۱، ۲، ۳ کے لیے $\text{ق}_{\text{ر}+۱} > \text{ق}_\text{ر}$ لیکن اگر

ر = ۴ تو قار + ۱ = قار اور یہی سب سے بڑی رقمیں ہیں پس معلوم ہوا کہ چوتھی اور پانچویں رقمیں عددی قیمت میں مساوی ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں اور ان کی قیمت

$$= ۳^{۹} \times {}_{۹}ج_{۳} \times \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}$$

$$= ۳^{۶} \times ۸۴ \times ۸ = ۴۸۹۸۸۸$$

۱۶۸۔ $(۱ + لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں ارقام کے سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

مساوات متماثلہ $(۱ + لا)^{ن} = ۱ + {}_{ن}ج_{۱}\,لا + {}_{ن}ج_{۲}\,لا^{۲} + {}_{ن}ج_{۳}\,لا^{۳} + \dots + {}_{ن}ج_{ن}\,لا^{ن}$

میں لا کو ایک کے مساوی رکھنے سے

$۲^{ن} = ۱ + ج_{۱} + ج_{۲} + ج_{۳} + \dots\dots + ج_{ن}$ = سروں کا مجموعہ

اس میں ${}_{ن}ج_{ر}$ کی جگہ $ج_{ر}$ اختصاراً لکھا گیا ہے۔

نتیجۂ صریح ۔ $ج_{۱} + ج_{۲} + ج_{۳} + \dots\dots + ج_{ن} = ۲^{ن} - ۱$

یعنی ” ن اشیا کے کل اجتماعوں کی تعداد “ $۲^{ن} - ۱$ ہے { دفعہ ۱۴۸ }

۱۶۹۔ ثابت کرو کہ $(۱ + لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں جفت رقموں کے سروں کا مجموعہ طاق رقموں کے سروں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

$(۱ + لا)^{ن} = ۱ + ج_{۱}\,لا + ج_{۲}\,لا^{۲} + ج_{۳}\,لا^{۳} + \dots\dots + ج_{ن}\,لا^{ن}$

یہ ایک مساوات متماثلہ ہے اس میں فرض کرو کہ لا = − ۱، پس

$۰ = ۱ - ج_{۱} + ج_{۲} - ج_{۳} + ج_{۴} - ج_{۵} + \dots\dots$

اس لیے $۱ + ج_{۲} + ج_{۴} + ج_{۶} + \dots\dots = ج_{۱} + ج_{۳} + ج_{۵} + \dots$

$= \frac{۱}{۲}$ (سب سروں کا مجموعہ)

$= ۲^{ن-۱}$

۱۷۰۔ مسئلہ ثنائی کی مدد سے ہم ایسے جملوں کو بھی پھیلا سکتے ہیں جن میں دو سے زیادہ رقمیں ہیں۔

مثال - جملہ (لا^۲ + ۲ لا - ۱)^۳ کی صورت تفصیلی معلوم کرو۔
اگر (۲ لا - ۱) کو ایک رقم مان لیا جائے تو صورت تفصیلی
= (لا^۲)^۳ + ۳ (لا^۲)^۲ (۲ لا - ۱) + ۳ لا^۲ (۲ لا - ۱)^۲ + (۲ لا - ۱)^۳
جو عمل اختصار کے بعد
= لا^۶ + ۶ لا^۵ + ۹ لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۹ لا^۲ + ۶ لا - ۱

۱۷۱- ذیل کی مثالیں سبق آموز ہیں

مثال (۱) ج.^۲ + ج۱^۲ + ج۲^۲ + ...... + جن^۲ کی قیمت دریافت کرو

(۱ + لا)^ن = ج. + ج۱ لا + ج۲ لا^۲ + ج۳ لا^۳ + ..... + جن لا^ن

(لا + ۱)^ن = ج. لا^ن + ج۱ لا^(ن-۱) + ج۲ لا^(ن-۲) + ........ + جن

اس لیے ضرب دینے سے ج.^۲ + ج۱^۲ + ج۲^۲ + ........ + جن^۲
= (۱ + لا)^ن (لا + ۱)^ن یعنی (۱ + لا)^۲ن کی صورت تفصیلی میں ن کا سر

اس لیے ج.^۲ + ج۱^۲ + ج۲^۲ + ........ + جن^۲ = |۲ن ÷ (|ن |ن)

مثال (۲)
اگر (۱ + لا)^ن = ج. + ج۱ لا + ج۲ لا^۲ + ...... + جن لا^ن
تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

ج. + ۲ ج۱ + ۳ ج۲ + ۴ ج۳ + ..... + (ن + ۱) جن ...(۱)

ج۱^۲ + ۲ ج۲^۲ + ۳ ج۳^۲ + ........ + ن جن^۲ ........ (۲)

سلسلہ (۱) = (ج. + ج۱ + ج۲ + ...... + جن)
+ (ج۱ + ۲ ج۲ + ۳ ج۳ + ...... ن جن)

= ۲^ن + ن {۱ + (ن - ۱) + ((ن - ۱)(ن - ۲))/(۱ × ۲) + ......

$$= \text{۲}^{\text{ن}} + \text{ن}\,(\text{۱}+\text{۱})^{\text{ن}-\text{۱}} = \text{۲}^{\text{ن}} + \text{ن} \times \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}$$

سلسلہ (۲) کی قیمت معلوم کرنے کے لیے اس طرح عمل کرو۔

$$\text{ج}_{\text{۱}}\,\text{لا} + \text{۲}\,\text{ج}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳}\,\text{ج}_{\text{۳}}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots + \text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= \text{ن}\,\text{لا}\left\{\text{۱} + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{لا} + \frac{(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\right\}$$

$$= \text{ن}\,\text{لا}\,(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}-\text{۱}}$$

اب لا کو $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$ میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ج}_{\text{۱}}}{\text{لا}} + \frac{\text{۲}\,\text{ج}_{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۳}\,\text{ج}_{\text{۳}}}{\text{لا}^{\text{۳}}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}}{\text{لا}}\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-\text{۱}} \ldots\ldots(\text{۳})$$

نیز $\text{ج}_{\text{۰}} + \text{ج}_{\text{۱}}\,\text{لا} + \text{ج}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \ldots\ldots + \text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}} \ldots\ldots\ldots(\text{۴})$

اب اگر رشتوں (۳) اور (۴) میں دائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیں تو معلوم ہوگا کہ اس حاصل ضرب کی رقم مطلق یعنی ایسی رقم جس میں لا موجود نہ ہو دیا ہوا سلسلہ (۲) ہے۔

اس لیے سلسلہ (۲) = $\frac{\text{ن}}{\text{لا}}\,(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}}\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-\text{۱}}$ کی صورت تفصیلی کی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو۔

$= \frac{\text{ن}}{\text{لا}^{\text{ن}}}\,(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۲ن}-\text{۱}}$ کی صورت تفصیلی کی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو۔

= لا^ن کا سر جملہ $\text{ن}\,(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۲ن}-\text{۱}}$ میں

$$= \text{ن} \times {}_{\text{۲ن}-\text{۱}}\text{ج}_{\text{ن}}$$

$$= \frac{\lfloor \text{۲ن}-\text{۱}}{\lfloor \text{ن}-\text{۱}\;\lfloor \text{ن}-\text{۱}}$$

مثال (۳)۔ ا - (ا+ب) ن + (ا+۲ب) $\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}$ - (ا+۳ب) $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱}$ + وغیرہ کی قیمت دریافت کرو۔

دیا ہوا جملہ = ا $\left\{۱-ن+\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}-\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱}+\cdots\right\}$

- ب $\left\{ن-ن(ن-۱)+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱}-\cdots\right\}$

= ا $(۱-۱)^{ن}$ - ب ن $(۱-۱)^{ن-۱}$ = ۰

## متفرق مثالیں

۱۷۲۔

مثال (۱)۔ $(۹۹۹ء)^{۷}$ کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

$(۹۹۹ء)^{۷} = \left(\frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}\right)^{۷} = \left(۱-\frac{۱}{۱۰^{۳}}\right)^{۷}$

$= ۱ - \frac{۷}{۱۰^{۳}} + \frac{۶\times۷}{۲\times۱}\times\frac{۱}{۱۰^{۶}} - \frac{۵\times۶\times۷}{۳\times۲\times۱}\times\frac{۱}{۱۰^{۹}} + \cdots$

= ۱ - ۰۰۷ء + ۰۰۰۰۲۱ء - ۰۰۰۰۰۰۰۳۵ء + .........

= ۱ - ۰۰۷ء یعنی ۹۹۳۰ء اعشاریہ کے چار مقام تک

یا = ۹۹۳۰۲۱۰ء اعشاریہ کے سات مقام تک

مثال (۲)۔ $(۱-لا)^{۴}(۱+لا)^{۹}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۷}$ کا سر دریافت کرو۔

$لا^{۷}$ کا سر $(۱-لا)^{۴}(۱+لا)^{۹}$ میں

= $لا^{۷}$ کا سر $(۱-۴لا+۶لا^{۲}-۴لا^{۳}+لا^{۴})(۱+لا)^{۹}$ میں

= $لا^{۷}$ کا سر جملہ $(۱+لا)^{۹}$ میں

- ۴ × { $لا^{۶}$ کا سر جملہ $(۱+لا)^{۹}$ میں }

+ ۶ × { $لا^{۵}$ 〃 〃 〃 }

- ۴ × { $لا^{۴}$ 〃 〃 〃 }

+ $لا^{۳}$ 〃 〃 〃

$$\frac{۶\times۷\times۸\times۹}{۴\times۳\times۲\times۱}\times۶+\frac{۷\times۸\times۹}{۳\times۲\times۱}\times۴-\frac{۸\times۹}{۲\times۱}=$$

$$\frac{۷\times۸\times۹}{۳\times۲\times۱}+\frac{۶\times۷\times۸\times۹}{۴\times۳\times۲\times۱}\times۴-$$

$$۸۴+\frac{۶\times۷\times۸\times۹\times۲}{۴\times۳\times۲\times۱}+۷\times۸\times۳\times۲-۳۶=$$

$$۳۶=۳۳۶-۳۷۲=۲۵۲+۳۳۶-۱۲۰=$$

## امثلہ نمبری ۱۳ ب

۱- $(۱-۲لا)^{۳}(۱+لا)^{۸}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۹}$ کا سر دریافت کرو۔

۲- $(۱+لا)^{۲}(۱-لا)^{۶}$ 〃 〃 $لا^{۵}$ 〃 〃

۳- $(۱+لا+لا^{۲})(۱+۲لا)^{۷}$ 〃 〃 $لا^{۵}$ 〃 〃

۴- $(۱+۲لا)^{۳}(۱+۳لا)^{۴}$ 〃 〃 $لا^{۳}$ 〃 〃

۵- ثابت کرو کہ $\left(لا+\frac{۱}{لا}\right)^{۲۰}=لا^{۲۰}+\frac{۱}{لا^{۲۰}}+ج_{۱}\left(لا^{۱۸}+\frac{۱}{لا^{۱۸}}\right)$

$+ج_{۲}\left(لا^{۱۶}+\frac{۱}{لا^{۱۶}}\right)+\ldots\ldots$ اور اس سلسلے کی آخری رقم دریافت کرو۔

مندرجۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو:—

۶- $(۱٫۰۵)^{۲}$ اعشاریہ کے دو مقام تک

۷- $(۱٫۰۰۲)^{۳}$ اعشاریہ کے تین مقام تک

۸- $(۱٫۰۰۲)^{۶}$ اعشاریہ کے پانچ مقام تک

۹- $(۱٫۰۰۵)^{۷}$ اعشاریہ کے چھ مقام تک

ذیل کی ہر ایک تفصیلی صورت میں دریافت کرو کہ سب سے بڑی رقم

کونسی ہے۔

۱۰- $(۲لا - ۳ما)^{۲۸}$ جب کہ لا = ۹ اور ما = ۴

۱۱- $(۲ا + ب)^{۱۴}$ جب کہ ا = ۴ اور ب = ۵

۱۲- $(۳ + ۲لا)^{۱۵}$ جب کہ لا = $\frac{۵}{۲}$

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں سب سے بڑی رقم کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳- $(۱ + لا)^{ن}$ جب کہ لا = $\frac{۲}{۳}$ اور ن = ۶

۱۴- $(ا + لا)^{ن}$ جب کہ ا = $\frac{۱}{۲}$، لا = $\frac{۱}{۳}$ اور ن = ۹

۱۵- ثابت کرو کہ $(۱ + لا)^{۲ن}$ کی درمیانی رقم کا سر $(۱ + لا)^{۲ن-۱}$ کی دو درمیانی رقموں کے سروں کے مجموعے کے برابر ہے۔

۱۶- اگر $(لا + ا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں طاق رقموں کا مجموعہ $م_۱$ ہو اور جفت رقموں کا مجموعہ $م_۲$، تو ثابت کرو کہ

$$م_۱^۲ - م_۲^۲ = (لا^۲ - ا^۲)^{ن}$$

۱۷- $(لا + ما)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں دوسری، تیسری، چوتھی رقمیں بالترتیب ۲۴۰، ۷۲۰ اور ۱۰۸۰ ہیں لا، ما، ن کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۸- $(۱ + ۲لا - لا^۲)^{۴}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

۱۹- $(۳لا^۲ - ۲الا + ۳ا^۲)^{۳}$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

۲۰- $(لا + ا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے ر ویں رقم دریافت کرو۔

۲۱- $(لا - \frac{۱}{لا})^{۲ن+۱}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے (ع + ۲) ویں رقم دریافت کرو۔

۲۲- $(۱ + لا)^{۴۳}$ کی صورت تفصیلی میں (۲ر + ۱) ویں اور (ر + ۲) ویں رقموں کے سر برابر ہیں، ر کی قیمت دریافت کرو۔

۲۳- $(۱ + لا)^{۲ن}$ کی صورت تفصیلی میں ۳ر ویں اور (ر + ۲) ویں رقموں کے سر برابر ہیں، ر اور ن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴- ثابت کرو کہ $(1+\text{لا})^{2\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں درمیانی رقم

$$= \frac{1\times3\times5\times\cdots\cdots(2\text{ن}-1)}{\underline{|\text{ن}}}\times 2^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

۲۵- $(2\,\text{لا}+3\,\text{ما})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۶- $(5\,\text{ا}-4\,\text{ب})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو اور $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $\text{ج}_0$، $\text{ج}_1$، $\text{ج}_2$،............ $\text{ج}_{\text{ن}}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۷- $\text{ج}_1+2\,\text{ج}_2+3\,\text{ج}_3+\cdots\cdots+\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}}=\text{ن}\times2^{\text{ن}-1}$

۲۸- $\text{ج}_0+\frac{\text{ج}_1}{2}+\frac{\text{ج}_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{ن}+1}=\frac{2^{\text{ن}+1}-1}{\text{ن}+1}$

۲۹- $\text{ج}_0\text{ج}_1+\text{ج}_1\text{ج}_2+\text{ج}_2\text{ج}_3+\cdots\cdots+\text{ج}_{\text{ن}-1}\text{ج}_{\text{ن}}=\frac{\underline{|2\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-1}\;\underline{|\text{ن}+1}}$

۳۰- $\frac{\text{ج}_1}{\text{ج}_0}+\frac{2\,\text{ج}_2}{\text{ج}_1}+\frac{3\,\text{ج}_3}{\text{ج}_2}+\cdots\cdots+\frac{\text{ن}\,\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{ج}_{\text{ن}-1}}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$

۳۱- $(\text{ج}_0+\text{ج}_1)(\text{ج}_1+\text{ج}_2)\cdots\cdots(\text{ج}_{\text{ن}-1}+\text{ج}_{\text{ن}})$

$$=\frac{\text{ج}_1\text{ج}_2\text{ج}_3\cdots\cdots\text{ج}_{\text{ن}}(\text{ن}+1)^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$$

۳۲- $2\,\text{ج}_0+\frac{2^2\text{ج}_1}{2}+\frac{2^3\text{ج}_2}{3}+\frac{2^4\text{ج}_3}{4}+\cdots\cdots+\frac{2^{\text{ن}+1}\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{ن}+1}$

$$=\frac{3^{\text{ن}+1}-1}{\text{ن}+1}$$

۳۳- $\text{ج}_0\text{ج}_{\text{ر}}+\text{ج}_1\text{ج}_{\text{ر}+1}+\text{ج}_2\text{ج}_{\text{ر}+2}+\cdots\cdots+\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}\text{ج}_{\text{ن}}$

$$= \frac{\lfloor \text{۲ن}}{\lfloor \text{ن-ر} \ \lfloor \text{ن+۱}}$$

۳۴۔ $\text{ج}_{۰} - \frac{۱}{۲}\text{ج}_{۱} + \frac{۱}{۳}\text{ج}_{۲} - \frac{۱}{۴}\text{ج}_{۳} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}} \frac{\text{ج}_{\text{ن}}}{\text{ن+۱}}$

$$= \frac{۱}{\text{ن+۱}}$$

۳۵۔ $\text{ج}_{۰}$، $\text{ج}_{۱}$، $\text{ج}_{۲}$، $\text{ج}_{۳}$، ........ $\text{ج}_{\text{ن}}$ میں سے دو دو کے

حاصل ضربوں کا مجموعہ $= ۲^{\text{۲ن-۱}} - \frac{\lfloor \text{۲ن}}{۲ \lfloor \text{ن} \lfloor \text{ن}}$

۳۶۔ سلسلہ $۱ + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۴}\,\text{لا}^{۴} + \cdots\cdots$ کو جمع کرو۔

۳۷۔ $۱ + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۱} \frac{\text{لا}}{\text{۱+لا}} + {}_{\text{ن}}\text{ج}_{۲} \left(\frac{\text{لا}}{\text{۱+لا}}\right)^{۲} + \cdots + \left(\frac{\text{لا}}{\text{۱+لا}}\right)^{\text{ن}}$ کو

مختصر کرو۔

# باب چہاردہم

## لامتناہی سلسلوں کا استدقاق مسئلہ ثنائی کسی قوت نما کے لیے

### ۳۔۱۔ انتہا۔

**تعریف**۔ فرض کرو کہ ن کی ہر مثبت صحیح قیمت کے جواب میں تفاعل ف (ن) کی ایک معین قیمت ہے۔ جیسے جیسے ن بڑھتا ہے، اگر ف (ن) ایک محدود مقدار ل کے بے انتہا قریب آجاتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (ن) کی انتہا جبکہ ن مائل بہ لامتناہی ہے ل کے برابر ہے۔

انتہا کی باضابطہ تعریف یہ ہے:—

کسی اختیاری مثبت مقدار صہ (جو جتنی چھوٹی چاہیں لی جاسکتی ہے) کے جواب میں اگر ایک مثبت صحیح عدد ن، ایسا دریافت کیا جاسکتا ہے کہ ن کی ان تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے جو ن، سے بڑی ہیں ف (ن) ۔ل کی عددی قیمت صہ سے چھوٹی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ ف (ن) کی انتہا جبکہ ن مائل بہ لامتناہی ہے ل کے برابر ہے اور لکھتے ہیں۔

$$\text{نہا}_{ن \leftarrow \infty} \text{ ف (ن)} = \text{ل}$$

مثال (۱)۔ اگر ف (ن) = ۱ + $\frac{1}{\text{ن}}$

$$\text{تو} \quad \text{نہا}_{ن \leftarrow \infty} \text{ ف (ن)} = 1$$

**مثال (۲)** ۔ اگر $ف(ن) = \frac{ن+۱}{ن^۲+۳}$ تو $\lim_{ن \to \infty}$ ف (ن) محسوب کرو۔

$$ف(ن) = \frac{ن+۱}{ن^۲+۳} = \frac{\frac{۱}{ن}+\frac{۱}{ن^۲}}{۱+\frac{۳}{ن^۲}}$$

جب ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو اس کسر کا شمار کنندہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اور نسب نما اکائی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لیے ف (ن) کی انتہا جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے $\frac{صفر}{۱}$ یعنی صفر ہے۔

**مثال (۳)** ۔ اگر $ف(ن) = (-۱)^ن$ تو $\lim_{ن \to \infty}$ ف (ن) وجود نہیں رکھتی کیونکہ ف (ن) = +۱ یا -۱ بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

**مثال (۴)** ۔ اگر $ف(ن) = ن^۲$ تو ف (ن) کی قیمت بے انتہا بڑھ جاتی ہے جبکہ ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے۔ اس صورت میں ف (ن) کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا۔

## ۱۷۴ ۔ لاتناہی سلسلے ۔

فرض کرو کہ ن کی ہر مثبت صحیح قیمت کے لیے تفاعل $ع_ن$ کی ایک معیّن قیمت ہے۔

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots + ع_ن + \cdots$$

کی شکل کے جملے کو، جس کی ہر رقم کے بعد اور ایک رقم ہے، لاتناہی سلسلہ کہتے ہیں۔ اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو علامت $ص_ن$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اگر $ص_ن$ ایک محدود انتہا ص کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ

ن لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لامتناہی سلسلہ مستدق ہے اور ص کو لامتناہی سلسلہ کا مجموعہ کہتے ہیں۔ پس ص کی تعریف ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \; ص_ن = ص$$

اس کو یوں بھی لکھتے ہیں۔

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots\ldots + ع_ن + \ldots\ldots \text{تا} \infty = ص$$

$$\text{یا} \; \sum_{۱}^{\infty} ع_ن = ص$$

اگر $ص_ن$ کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو جبکہ ن لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لامتناہی سلسلہ غیر مستدق ہے۔

**مثال (۱)** لامتناہی ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ = ۲

**مثال (۲)**۔ اگر لا بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے چھوٹا ہو تو لامتناہی ہندسی سلسلہ $ا + ا\text{لا} + ا\text{لا}^۲ + ا\text{لا}^۳ + \ldots\ldots\ldots$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ = $\frac{ا}{۱ - \text{لا}}$ (دفعہ ۵۷)

**مثال (۳)**۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots\ldots\ldots \text{تا} \infty$$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس صورت میں

$$ع_۱ = \frac{۱}{۱ \times ۲} = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}$$

$$ع_۲ = \frac{۱}{۲ \times ۳} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}$$

$$ع_۳ = \frac{۱}{۳ \times ۴} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}$$

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}(\text{ن}+1)} = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

$$\therefore \quad \text{ص}_{\text{ن}} = 1 - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

$$\text{اور نہا}_{\text{ن}\to\infty} \ \text{ص}_{\text{ن}} = 1$$

اس لیے دیا ہوا لامتناہی سلسلہ مستدق ہے اور اس کا مجموعہ = ۱

**مثال (۴)** اگر سلسلہ ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ............ تا $\infty$

کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ $\text{ص}_{\text{ن}}$ ہو تو

$\text{ص}_{\text{ن}}$ = ۱ یا صفر بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت -
اس لیے $\text{ص}_{\text{ن}}$ کسی انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا - یعنی دیا ہوا لامتناہی سلسلہ غیر مستدق ہے -

## ۱۷۵ - لامتناہی سلسلوں کے استدقاق کے عام مسئلے -

(۱) اگر م ایک دیا ہوا مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلے

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \dots + \text{ع}_{\text{ن}} + \dots \ \text{تا}\ \infty$$

$$\text{اور} \quad \text{ع}_{\text{م}+1} + \text{ع}_{\text{م}+2} + \text{ع}_{\text{م}+3} + \dots \ \text{تا}\ \infty$$

دونوں مستدق ہونگے یا دونوں غیر مستدق ہونگے -

$$\text{فرض کرو کہ} \quad \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \dots + \text{ع}_{\text{ن}}$$

$$\text{اور} \quad \text{س}_{\text{ن}} = \text{ع}_{\text{م}+1} + \text{ع}_{\text{م}+2} + \dots + \text{ع}_{\text{م}+\text{ن}}$$

$$\therefore \quad \text{س}_{\text{ن}} = \text{ص}_{\text{م}+\text{ن}} - \text{ص}_{\text{م}}$$

چونکہ $\text{ص}_{\text{م}}$ مستقل ہے، اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ
اگر $\text{ص}_{\text{م}+\text{ن}}$ ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہو تو $\text{س}_{\text{ن}}$ بھی ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہوگا -

اگر $ص_{م+ن}$ کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو تو $س_ن$ بھی کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوگا۔

(۲) اگر سلسلہ $ع_1 + ع_2 + \dots\dots + ع_ن + \dots\dots$ تا $\infty$

مستدق ہو اور اس کا مجموعہ ص ہو تو

سلسلہ $ج ع_1 + ج ع_2 + ج ع_3 + \dots\dots + ج ع_ن + \dots\dots$ تا $\infty$

بھی مستدق ہوگا اور اس کا مجموعہ ج ص ہوگا،

کیونکہ اگر $\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ص_ن = ص$

تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ج ص_ن = ج ص$

(۳) اگر لاتناہی سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots\dots ع_ن + \dots\dots$

مستدق ہو تو $\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ع_ن = ۰$

چونکہ $ع_ن = ص_ن - ص_{ن-1}$

$\therefore \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ع_ن = \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} (ص_ن - ص_{ن-1})$

$= \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ص_ن - \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ص_{ن-1}$

$= ص - ص = ۰$

اس مسئلہ کا عکس درست نہیں ہے، یعنی اگر $\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ع_ن = ۰$ تو ضروری نہیں ہے کہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہو۔

**مثال**۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{ن} + \dots\dots$ تا $\infty$

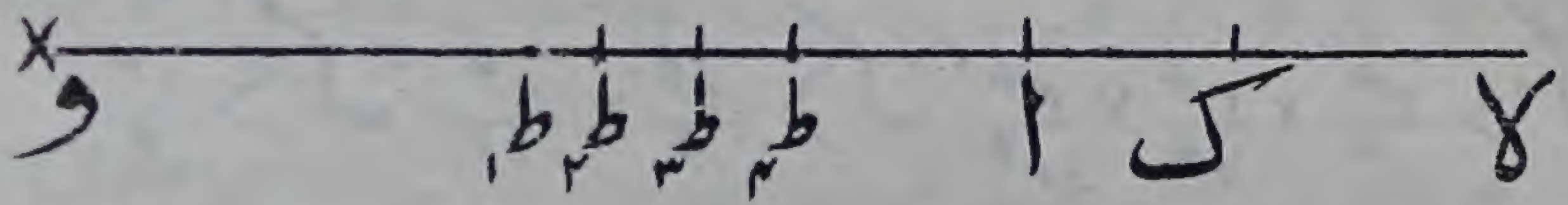
غیر مستدق ہے اگر چیکہ $\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} ع_ن = ۰$۔

(۴) اگر ایک لاتناہی سلسلہ کی تمام رقمیں مثبت ہوں

اور اگر $ص_ن$ ہمیشہ چھوٹا ہو ایک محدود عدد ک سے تو دیا ہوا سلسلہ مستدق ہوگا اور اس کا مجموعہ ک سے بڑا نہیں ہوگا۔

اس مسئلہ کا باضابطہ ثبوت مشکل ہے۔ لیکن مبتدی کے لیے ذیل کا استدلال کافی ثابت ہوگا۔

چونکہ سلسلہ کی تمام رقمیں مثبت ہیں، اس لیے جیسے جیسے ن بڑھتا ہے $ص_ن$ بھی بڑھتا ہے۔ نیز $ص_ن$ ہمیشہ چھوٹا ہے ک سے۔ ایک خطِ مستقیم و لا پر نقاط $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$ ......... ک کے ذریعے اعداد $ص_۱$، $ص_۲$، $ص_۳$ ......... ک کو تعبیر کرو۔

و $ط_۱$ $ط_۲$ $ط_۳$ $ط_۴$ ا ک لا

ن کی قیمتوں ۱، ۲، ۳، ......... کے جواب میں نقطہ $ط_ن$ بالترتیب مقامات $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$ ......... پر واقع ہوتا ہے اور جیسے جیسے ن بڑھتا ہے، $ط_ن$ بائیں جانب سے دائیں جانب کو ہٹتا ہے۔

چونکہ $ط_ن$ کبھی بھی ک کی دائیں جانب نہیں آسکتا اس لیے ایک ایسا نقطہ ا وجود رکھتا ہے (جو ک کی بائیں جانب ہے یا ک پر منطبق ہے) کہ ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے $ط_ن$ ا کا طول جتنا چھوٹا چاہیں بنایا جا سکتا ہے۔

اگر نقطہ ا سے تعبیر ہونے والا عدد ا ہو تو

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} ص_ن = ا$$

یعنی دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ا ہے۔

**۱۷۶** ۔ عملی ضروریات کے لیے غیر مستدق سلسلے بہت کم استعمال میں آتے ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ ایسے سادہ طریقے معلوم

کیے جائیں جن کی مدد سے ہم یہ جانچ سکیں کہ ایک دیا ہوا لامتناہی سلسلہ مستدق ہے یا نہیں۔ دفعات ۱۷۷ تا ۱۸۱ کے طریقے چند مشہور سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کے لیے کافی ثابت ہونگے۔

**۱۷۷**۔ اگر سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ کی تمام رقمیں مثبت ہوں اور (۱) اگر ن کی تمام قیمتوں کے لیے $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} < ک < 1$

یا (۲) اگر نہا $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} < 1$ تو دیا ہوا سلسلہ مستدق ہوگا۔

(۱) بموجب فرض

$$\frac{ع_2}{ع_1} < ک، \quad \frac{ع_3}{ع_2}\times\frac{ع_2}{ع_1} < ک^2، \quad \frac{ع_4}{ع_3}\times\frac{ع_3}{ع_2}\times\frac{ع_2}{ع_1} < ک^3،$$

$$\frac{ع_5}{ع_4}\times\frac{ع_4}{ع_3}\times\frac{ع_3}{ع_2}\times\frac{ع_2}{ع_1} < ک^4 \text{ وغیرہ}$$

$\therefore$ $ع_2 < ک ع_1$، $ع_3 < ک^2 ع_1$، $ع_4 < ک^3 ع_1$، وغیرہ

اس لیے سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots\dots$ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ہندسی سلسلہ $ع_1 + ک ع_1 + ک^2 ع_1 + \dots$ کی پہلی ن رقموں کے مجموعہ سے چھوٹا ہوگا۔ چونکہ $ک < 1$ اس لیے ن کی تمام قیمتوں کے لیے ہندسی سلسلہ $ع_1 + ک ع_1 + ک^2 ع_1 + \dots\dots$ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ $\frac{ع_1}{1-ک}$ سے چھوٹا ہوگا۔ اس لیے ن کی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots\dots$ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ محدود مقدار $\frac{ع_1}{1-ک}$ سے چھوٹا ہوگا۔ پس بموجب دفعہ ۱۷۵، (۴) دیا ہوا لامتناہی سلسلہ مستدق ہے۔

(۲) فرض کرو کہ نہا $\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن} = ل$ جہاں $0 < ل < 1$

ایک عدد ک ایسا منتخب کرو کہ $ل < ک < ۱$

انتہا کی تعریف کی رو سے ایک مثبت صحیح عدد م ایسا معلوم کیا جا سکتا ہے کہ $\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}} < ک$ بشرطیکہ $ن > م$، کیونکہ ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے $\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}$ اور ل کا فرق ک اور ل کے فرق سے چھوٹا ہوتا ہے۔

پس سلسلہ $ع_{م+۱} + ع_{م+۲} + \dots$ متدق ہے اور اس لیے سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots$ بھی متدق ہے [دفعہ ۱۷۵، (۱)]

**۱۷۸**۔ سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots$ غیر متدق ہوگا

(۱) اگر $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}\right| \geqq ۱$ ایا (۲) اگر نہا $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}\right| > ۱$

(۱) اس صورت میں سلسلہ کی ہر رقم بلحاظ عددی قیمت کے اپنی رقم ماقبل کے برابر ہے یا اس سے بڑی ہے۔ اس لیے $ع_ن$ صفر کی طرف مائل نہیں ہوتا جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ یعنی دفعہ ۱۷۵، (۳) کی شرط پوری نہیں ہوتی ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ غیر متدق ہے۔

(۲) فرض کرو کہ نہا $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}\right| = ل$ جہاں $ل > ۱$

انتہا کی تعریف کی رو سے ایک مثبت صحیح عدد م ایسا معلوم کیا جا سکتا ہے کہ

$$\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_{ن}}\right| > ۱ \text{ بشرطیکہ } ن > م$$

پس سلسلہ $ع_{م+۱} + ع_{م+۲} + ع_{م+۳} + \dots$ غیر متدق ہے

اس لیے دیا ہوا سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots\ldots$ بھی غیر مستدق ہے۔

**نوٹ:۔** (۱) یہ کافی ہے کہ دفعات ۱۷۶ اور ۱۷۷ کے شرائط ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوں جو ایک دیے ہوئے عدد ع سے بڑی ہیں۔

(۲) اگر $\text{نہا}\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}\right| = ۱$ تو اس جانچ کی مدد سے سلسلہ کے استدقاق یا عدم استدقاق کی تحقیق نہیں ہو سکتی۔

**۱۷۹۔** سلسلہ $ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ع_۴ + \ldots\ldots$، جس میں رقمیں متبادلاً مثبت منفی ہیں، مستدق ہوگا۔ اگر کوئی رقم اپنی رقم ماقبل سے بلحاظ عددی قیمت کے بڑی نہ ہو اور $\text{نہا}\, ع_ن = ۰$.

پہلی ۲ن رقموں کے مجموعہ پر غور کرو۔

$$ص_{۲ن} = (ع_۱ - ع_۲) + (ع_۳ - ع_۴) + \ldots\ldots (ع_{۲ن-۱} - ع_{۲ن}) \ldots\ldots(۱)$$

یہ مجموعہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$ص_{۲ن} = ع_۱ - (ع_۲ - ع_۳) - (ع_۴ - ع_۵) - \ldots\ldots - ع_{۲ن} \ldots\ldots(۲)$$

چونکہ $ع_۱ \geq ع_۲ \geq ع_۳ \geq ع_۴ \ldots\ldots\ldots$

اس لیے قوسوں کے اندر کی مقداریں منفی نہیں ہیں۔

رشتہ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ $ص_{۲ن}$ مثبت ہے اور اس کی قیمت ن کے ساتھ ساتھ بڑھتی ہے۔ رشتہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ $ص_{۲ن}$ ہمیشہ چھوٹا ہے $ع_۱$ سے۔

پس دفعہ ۱۷۵، (۴) کی رُو سے $ص_{۲ن}$ ایک انتہا ص کی طرف، جو مثبت ہے اور $ع_۱$ سے چھوٹی ہے، مائل ہوتا ہے

نیز $ص_{۲ن+۱} = ص_{۲ن} + ع_{۲ن+۱}$ اور $\text{نہا}\, ع_{۲ن+۱} = ۰$

اس لیے $ص_{۲ن+۱}$ بھی اسی انتہا ص کی طرف مائل ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے اور اُس کا مجموعہ مثبت ہے اور $ع_۱$ سے چھوٹا ہے۔

**۱۸۰۔** فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے لامتناہی سلسلہ س میں مثبت اور منفی دونوں قسم کی رقمیں ہیں۔ فرض کرو کہ اس سلسلہ س کی تمام منفی رقموں کی علامت بدلنے سے سلسلہ سؔ حاصل ہوتا ہے۔

اگر سلسلہ سؔ مستدق ہو تو سلسلہ س بھی مستدق ہوگا۔

اس مسئلہ کا باضابطہ ثبوت مشکل ہے۔ فی الحال طالب علم اس مسئلہ کو بغیر ثبوت کے مان لے۔

**مثال۔** سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} + \cdots\cdots$
مستدق ہے کیونکہ

سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots\cdots$ مستدق ہے۔

**۱۸۱۔** دفعات ۱۷۷ تا ۱۸۰ کی مدد سے معلوم ہوتا ہے کہ لامتناہی سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots + ع_ن + \cdots$ (جس کی رقمیں مثبت اور منفی دونوں قسم کی ہیں) مستدق ہے (۱) اگر ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے عدد م سے بڑی ہیں $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}\right| < ک < ۱$

یا (۲) اگر نہا $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}\right| = ل < ۱$

اور دیا ہوا سلسلہ غیر مستدق ہوگا (۱) اگر ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے عدد م سے بڑی ہیں $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}\right| \geq ۱$

یا (۲) اگر نہا $\left|\frac{ع_{ن+۱}}{ع_ن}\right| = ل > ۱$

# امثلہ نمبری ۱۱۴

ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں :-

۱- $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳ \times ۳} - \frac{۱}{۲^۴ \times ۴} + \dots\dots\dots$

۲- $۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \dots\dots\dots$

۳- $۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲!} + \frac{لا^۳}{۳!} + \frac{لا^۴}{۴!} + \dots\dots\dots$ لا کی محدود قیمتوں کے لیے

۴- $۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + ۵لا^۴ + \dots\dots\dots$ اگر لا عدداً ایک سے کم ہو۔

۵- ثابت کرو کہ اگر ع $>$ ۱ تو سلسلہ

$\frac{۱}{۱^ع} + \frac{۱}{۲^ع} + \frac{۱}{۳^ع} + \frac{۱}{۴^ع} + \dots\dots\dots$ مستدق ہے۔

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں یا نہیں ؟

۶- $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \frac{۱}{۵ \times ۶} + \dots\dots\dots$

۷- $\frac{۱}{لا\,ما} - \frac{۱}{(لا+۱)(ما+۱)} + \frac{۱}{(لا+۲)(ما+۲)} - \frac{۱}{(لا+۳)(ما+۳)} + \dots\dots$

جبکہ لا اور ما مثبت مقداریں ہیں

۸- $۱ + ۳لا + ۵لا^۲ + ۷لا^۳ + ۹لا^۴ + \dots\dots\dots$

۹- $۱ + \frac{۲^۲}{۲!} + \frac{۳^۳}{۳!} + \frac{۴^۴}{۴!} + \dots\dots\dots$

۱۰- $\frac{لا}{۱ \times ۲} + \frac{لا^۲}{۳ \times ۴} + \frac{لا^۳}{۵ \times ۶} + \frac{لا^۴}{۷ \times ۸} + \dots\dots\dots$

# قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلۂ ثنائی کا ثبوت

**۱۸۲۔** پچھلے باب میں ہم نے مسئلۂ ثنائی کی اس صورت پر غور کیا ہے جس میں قوت نما مثبت صحیح عدد تھا۔ اب ہم اس کی تحقیق کرینگے کہ آیا پچھلے باب کے ضابطے قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے بھی درست ہیں یا نہیں۔

چونکہ دفعہ ۱۶۷ کی رو سے، ہر ثنائی جملہ کو معیاری شکل میں لایا جا سکتا ہے، اس لیے صرف $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی شکل کے جملہ پر غور کرنا کافی ہوگا۔

جذر نکالنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۱+\text{لا})^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱+\text{لا}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا} - \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۱۶}\text{لا}^{۳} - \cdots\cdots$$

اور عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۱-\text{لا})^{-۲} = \frac{۱}{(۱-\text{لا})^{۲}} = ۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots$$

اور ان سلسلوں میں سے ہر ایک میں رقموں کی تعداد لامحدود ہے۔

ان صورتوں میں ہم نے علیحدہ علیحدہ طریقوں سے جملوں $(۱+\text{لا})^{\frac{۱}{۲}}$ اور $(۱-\text{لا})^{-۲}$ کے پھیلاؤ حاصل کیے ہیں۔ ابھی ہم یہ ثابت کرینگے کہ مندرجہ بالا نتائج جملہ $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی خاص صورتیں ہیں جبکہ ن کوئی منطق مقدار ہو۔

**۱۸۳۔** اگر م کوئی منطق عدد ہو تو لاتناہی سلسلہ

$$۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)}{\lfloor ۳}\text{لا}^{۳} + \cdots\cdots$$

کے استدقاق پر بحث کرو۔ یہ فرض کیا گیا ہے کہ م مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔

اگر اس سلسلہ کی ر ویں رقم کو $\text{ع}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر}+۱}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{م}-\text{ر}+۱}{\text{ر}} \times \text{لا} = \left(\frac{\text{م}+۱}{\text{ر}} - ۱\right)\text{لا}$$

$\therefore$ نہا $\left|\frac{ع_ر + ۱}{ع_ر}\right| = |لا|$ (ر ← ∞)

دفعہ ۱۸۱ کی رو سے دیا ہوا سلسلہ متدق ہوگا اگر |لا| < ۱ اور غیر متدق ہوگا اگر |لا| > ۱

**نوٹ:۔** اس سلسلہ کو ثنائی سلسلہ کہتے ہیں۔ اگر م صحیح مثبت عدد ہو تو (م + ۱) ویں رقم کے بعد اس سلسلہ کی تمام رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور دیا ہوا سلسلہ متناہی سلسلہ بن جاتا ہے اور پہلی م + ۱ رقموں کو جمع کرنے سے اس کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر م منفی یا مکسور ہو تو ایک لاتناہی سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

**۱۸۴۔** اگر |لا| < ۱ اور م کوئی منطق عدد ہو تو متدق سلسلہ

$$۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}لا^{۲} + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}}لا^{۳} + \ldots\ldots$$

کو ف (م) سے تعبیر کرو۔

$$\text{پس}\quad ف(م) = ۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}لا^{۲} + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\underline{|۳}}لا^{۳} + \ldots \quad (۱)$$

$$\text{اور}\quad ف(ن) = ۱ + ن\,لا + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}لا^{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\underline{|۳}}لا^{۳} + \ldots \quad (۲)$$

ان دو سلسلوں کا حاصل ضرب لا کی بڑھتی ہوئی قوتوں کا ایک سلسلہ ہوگا۔ اس سلسلہ کو

$$۱ + ا\,لا + ب\,لا^{۲} + ج\,لا^{۳} + \ldots\ldots\ldots$$

سے تعبیر کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ ا، ب، ج ............ م اور ن کے تفاعل ہیں۔ اس لیے کسی خاص صورت میں ا، ب، ج ......... کی قیمتیں م اور ن کی قیمتوں پر منحصر ہونگی۔ لیکن ا، ب، ج، کو حاصل کرنے کے لیے سلسلوں (۱) اور (۲) میں لا کی قوتوں کے سر

جس طریقہ سے ملائے جاتے ہیں وہ طریقہ م اور ن کی قیمتوں پر منحصر نہیں ہے، یعنی م اور ن کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں، سروں ا، ب، ج ....... کی صورت غیر متبدل ہوگی۔ اس لیے اگر ہم ا، ب، ج کی صورت م اور ن کی کوئی خاص قیمتوں کے لیے معلوم کر سکیں تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے ا، ب، ج ....... کی وہی غیر متبدل صورت ہوگی۔

قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلۂ ثنائی کو ثابت کرنے کے لیے ہم مندرجۂ بالا اصول استعمال کرینگے۔

**۱۸۵۔ قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلۂ ثنائی کو ثابت کرو۔ [آئیلر کا ثبوت]**

دفعہ ۱۸۴ کی ترقیم کے مطابق اگر | لا | < ا اور م اور ن کوئی منطق اعداد ہوں تو ف (م) اور ف (ن) کا حاصل ضرب لا کی صعودی قوتوں کا ایک سلسلہ ہوگا جس میں سروں ا، ب، ج ...... کی صورت غیر متبدل ہوگی۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متبدل صورت معلوم کرنے کے لیے ہم م اور ن کو وہ قیمتیں دے سکتے ہیں جن سے عمل میں سہولت ہو۔

پس فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں اس صورت میں ف (م) صورت تفصیلی ہے (ا + لا)^م کی اور ف (ن) صورت تفصیلی ہے (ا + لا)^ن کی، اس لیے

$$ف\ (م) \times ف\ (ن) = (ا + لا)^{م} \times (ا + لا)^{ن} = (ا + لا)^{م+ن}$$

لیکن اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو (ا + لا)^{م+ن} کی صورت تفصیلی ہے۔

$$ا + (م + ن)\ لا + \frac{(م+ن)\ (م+ن-ا)}{ا \times ۲}\ لا^{۲} + \ldots\ldots \quad (ا)$$

پس معلوم ہوا کہ تمام صورتوں میں حاصل ضرب $\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن})$ کی صورت تفصیلی (۱) ہوگی خواہ م اور ن کی قیمتیں کچھ ہی ہوں اور سابق طریق کتابت کے موافق ہم اس کو $\text{ف}(\text{م}+\text{ن})$ سے تعبیر کر سکتے ہیں اس لیے م اور ن کی تمام منطق قیمتوں کے لیے

$$\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن}) = \text{ف}(\text{م}+\text{ن})$$

نیز $\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن}) \times \text{ف}(\text{ع}) = \text{ف}(\text{م}+\text{ن}) \times \text{ف}(\text{ع})$

$$= \text{ف}(\text{م}+\text{ن}+\text{ع})$$

اسی طرح عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن}) \times \text{ف}(\text{ع}) \ldots\ldots$ س اجزائے ضربی تک

$= \text{ف}(\text{م}+\text{ن}+\text{ع}+\ldots\ldots$ س رقموں تک$)$

فرض کرو کہ ان میں سے ہر ایک مقدار $\frac{\text{ر}}{\text{س}}$ کے برابر ہے جہاں ر اور س دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$\therefore \left\{\text{ف}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)\right\}^{\text{س}} = \text{ف}(\text{ر})$$

لیکن چونکہ ر مثبت صحیح عدد ہے اس لیے $\text{ف}(\text{ر}) = (۱+\text{لا})^{\text{ر}}$

$$\therefore (۱+\text{لا})^{\text{ر}} = \left\{\text{ف}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)\right\}^{\text{س}}$$

$$\therefore (۱+\text{لا})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)$$

لیکن $\text{ف}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)$ سلسلۂ ذیل کو تعبیر کرتا ہے۔

$$۱ + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\,\text{لا} + \frac{\frac{\text{ر}}{\text{س}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}-۱\right)}{۱\times۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

$$\therefore (۱+\text{لا})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}} = ۱ + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\,\text{لا} + \frac{\frac{\text{ر}}{\text{س}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{س}}-۱\right)}{۱\times۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

جس سے مسئلۂ ثنائی ثابت ہوتا ہے جبکہ قوت نما ایک مثبت کسر ہو۔

اب ہم مسئلۂ ثنائی کا ثبوت منفی قوت نما کے لیے دینگے -
یہ ثابت ہو چکا ہے کہ م اور ن کی تمام منطق قیمتوں کے لیے

$$\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن}) = \text{ف}(\text{م} + \text{ن})$$

اس میں م کی بجائے (-ن) رکھو (جہاں ن مثبت مقدار ہے) حاصل ہوگا

$$\text{ف}(-\text{ن}) \times \text{ف}(\text{ن}) = \text{ف}(-\text{ن} + \text{ن}) = \text{ف}(۰) = ۱$$

کیونکہ سوائے پہلی رقم کے دوسری تمام رقمیں نابود ہوتی ہیں -

$$\therefore \frac{۱}{\text{ف}(\text{ن})} = \text{ف}(-\text{ن})$$

لیکن ن کی کسی مثبت قیمت کے لیے $\text{ف}(\text{ن}) = (۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$

$$\therefore \frac{۱}{(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}} = \text{ف}(-\text{ن})$$

$$\text{یا} \quad (۱ + \text{لا})^{-\text{ن}} = \text{ف}(-\text{ن})$$

$$\text{لیکن} \quad \text{ف}(-\text{ن}) \equiv ۱ + (-\text{ن})\,\text{لا} + \frac{(-\text{ن})(-\text{ن} - ۱)}{۲ \times ۱}\,\text{لا}^۲ + \dots$$

$$\text{اس لیے} \quad (۱ + \text{لا})^{-\text{ن}} = ۱ + (-\text{ن})\,\text{لا} + \frac{(-\text{ن})(-\text{ن} - ۱)}{۲ \times ۱}\,\text{لا}^۲ + \dots$$

جس سے مسئلۂ ثنائی منفی قوت نما کے لیے بھی ثابت ہوا۔
پس یہ مسئلہ بالعموم قوت نما کی تمام منطق قیمتوں کے لیے ثابت ہوا -

**۱۸۶**- مسئلۂ ثنائی کا ثبوت جو دفعۂ گزشتہ میں دیا گیا ہے وہ پورا تشفی بخش نہیں، اس میں غالباً طالب علم کو متعدد مشکلات پیش آئینگی- اس جگہ ہم فقط ایک بات کا ذکر کیے دیتے ہیں کہ جملہ ف (م) میں اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو تعداد ارقام محدود ہوتی ہے ورنہ باقی سب حالتوں میں غیر محدود، اس لیے یہ تحقیق کرنا

ضروری ہے کہ مساوات متماثلہ ف (م) × ف (ن) = ف (م + ن) کا پورا پورا مفہوم کیا ہے اس کے صحیح ہونے کے لیے کن کن شرائط اور قیود کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہیے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر |لا| < ۱ تو ف (م)، ف (ن)، ف (م + ن) تینوں سلسلے مستدق ہیں اور اس صورت میں ف (م + ن) حاصل ضرب ف (م) × ف (ن) کا حسابی قائم مقام ہوگا لیکن جب |لا| > ۱ تو مذکورۂ بالا سب سلسلے غیر مستدق ہوں گے اور ان کے متعلق اس صورت میں ہم صرف یہی بیان کر سکتے ہیں کہ اگر ہم سلسلۂ ف (م) کو سلسلۂ ف (ن) سے ضرب دیں تو حاصل ضرب کی پہلی ر رقمیں جملہ ف (م + ن) کی پہلی رقموں کے برابر ہوں گی۔ خواہ ر کی کوئی محدود قیمت ہو۔

**مثال (۱)۔** $(۱ - \text{لا})^{\frac{۳}{۲}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(۱-\text{لا})^{\frac{۳}{۲}} = ۱ + \frac{۳}{۲}(-\text{لا}) + \frac{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}-۱\right)}{۱\times۲}(-\text{لا})^{۲}$$

$$+ \frac{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}-۱\right)\left(\frac{۳}{۲}-۲\right)}{۱\times۲\times۳}(-\text{لا})^{۳} + \dots$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۲}\,\text{لا} + \frac{۳}{۸}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۱۶}\,\text{لا}^{۳} + \dots$$

**مثال (۲)۔** جملہ $(۲ + ۳\text{لا})^{-۴}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(۲+۳\text{لا})^{-۴} = ۲^{-۴}\left(۱ + \frac{۳\text{لا}}{۲}\right)^{-۴}$$

$$= \frac{۱}{۲^{۴}}\left\{۱ + (-۴)\left(\frac{۳\text{لا}}{۲}\right) + \frac{(-۴)(-۵)}{۱\times۲}\left(\frac{۳\text{لا}}{۲}\right)^{۲}\right.$$

$$\left. + \frac{(-۴)(-۵)(-۶)}{۱\times۲\times۳}\left(\frac{۳\text{لا}}{۲}\right)^{۳} + \dots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۱۶}\left(۱ - ۶\text{لا} + \frac{۴۵}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۱۳۵}{۲}\text{لا}^{۳} + \dots\right)$$

**مثال (۳)۔** جملہ $\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ۔

$$\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}} = (ا^{۲} - لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ا\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ا\left\{۱ + \frac{۱}{۲}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right) + \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)}{۱\times۲}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{۲}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}-۲)}{۱\times۲\times۳}\left(-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right)^{۳} + \text{وغیرہ}\right\}$$

$$= ا\left\{۱ - \frac{۱}{۲}\times\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{۱}{۸}\times\frac{لا^{۴}}{ا^{۴}} - \frac{۱}{۱۶}\times\frac{لا^{۶}}{ا^{۶}} - \cdots\cdots\right\}$$

**۱۸۷۔** رقم عامہ دریافت کرنے کے لیے اب ہمیں ضابطہ

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots(ن-ر+۱)}{\underline{|ر}}\,لا^{ر}$$ استعمال کرنا چاہیے

کیونکہ علامت $\underline{|ر}$ اس صورت میں بالکل بے معنی ہے جبکہ ن مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔ نیز رقم عامہ کا سر کبھی معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ شمار کنندہ کے اجزائے ضربی میں سے کوئی ایک صفر کے برابر نہ ہو اس لیے سلسلہ ر ویں رقم پر ختم ہوگا اگر $ن - ر + ۱ = ۰$
یعنی جب $ر = ن + ۱$ لیکن چونکہ ر ایک مثبت عدد ہے اس لیے یہ مساوات ناممکن ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ قوت نما ن مثبت صحیح عدد ہو۔ پس معلوم ہوا کہ مسئلۂ ثنائی کی صورت تفصیلی میں $(ن + ۱)$ ارقام ہونگی اگر ن مثبت صحیح عدد ہو لیکن باقی سب صورتوں میں رقموں کی تعداد لاانتہا بڑی ہوگی۔

**مثال (۱)۔** $(۱+لا)^{\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عاؔ دریافت کرو

$$(\text{ر}+1)\text{ ویں رقم} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\text{ر}+1\right)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(-2\text{ر}+3)}{2^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

شمار کنندہ میں اجزائے ضربی کی تعداد ر ہے اور ان میں سے ر - ۱ منفی ہیں۔ اس لیے اگر -۱ کو ہر ایک جزو ضربی سے لے کر علیحدہ اکھٹا کیا جائے تو جملہ مندرجۂ بالا اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$(-1)^{\text{ر}-1}\,\frac{1\times3\times5\cdots(2\text{ر}-3)}{2^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

**مثال (۲)۔** $(1-\text{ن لا})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$(\text{ر}+1)\text{ ویں رقم} = \frac{\frac{1}{\text{ن}}\left(\frac{1}{\text{ن}}-1\right)\left(\frac{1}{\text{ن}}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{\text{ن}}-\text{ر}+1\right)}{\underline{|\text{ر}}}\,(-\text{ن لا})^{\text{ر}}$$

$$= \frac{1(1-\text{ن})(1-2\text{ن})\cdots(1-\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن})}{\text{ن}^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\,(-1)^{\text{ر}}\,\text{ن}^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{\text{ر}}\,\frac{1(1-\text{ن})(1-2\text{ن})\cdots(1-\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن})}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{\text{ر}}(-1)^{\text{ر}-1}\times\frac{(\text{ن}-1)(2\text{ن}-1)\cdots(\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن}-1)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= -\frac{(\text{ن}-1)(2\text{ن}-1)\cdots(\overline{\text{ر}-1}\times\text{ن}-1)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

کیونکہ $(-1)^{\text{ر}}(-1)^{\text{ر}-1} = (-1)^{2\text{ر}-1} = -1$

**مثال (۳)۔** $(1-\text{لا})^{-3}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$(\text{ر}+1)\text{ ویں رقم} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-3-\text{ر}+1)}{\underline{|\text{ر}}}\,(-\text{لا})^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{\text{ر}}\,\frac{3\times4\times5\cdots(\text{ر}+2)}{\underline{|\text{ر}}}\,(-1)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{2\text{ر}}\,\frac{3\times4\times5\cdots(\text{ر}+2)}{1\times2\times3\times\cdots\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$ [ شمار کنندہ اور نسب نما سے متماثل اجزائے ضربی کو دور کرنے سے ]

**مثال (۴)**۔ ثابت کرو کہ $(\text{۱}+\text{لا})^{\frac{\text{۵}}{\text{۳}}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$

$$\text{کا سر} = \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}^{\text{ر}}} \times \frac{\text{۱}\times\text{۴}\times\text{۷}\times \ldots\ldots (\text{۳ر}-\text{۸})}{\text{ر}!} \times (-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۲}}$$ ہے

چونکہ (ر + ۱) ویں رقم میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ واقع ہوتا ہے

$$\text{اس لیے سر مطلوب} = \frac{\frac{\text{۵}}{\text{۳}}(\frac{\text{۵}}{\text{۳}}-\text{۱})(\frac{\text{۵}}{\text{۳}}-\text{۲})\ldots\ldots(\frac{\text{۵}}{\text{۳}}-\text{ر}+\text{۱})}{\text{ر}!}$$

$$= \frac{\text{۵}\times\text{۲}(-\text{۱})\times(-\text{۴})\times(-\text{۷})\ldots\ldots(-\text{۳ر}+\text{۸})}{\text{۳}^{\text{ر}}\,\text{ر}!}$$

$$= (-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۲}} \times \frac{\text{۵}\times\text{۲}\times\text{۱}\times\text{۴}\times\text{۷}\times\ldots\ldots(\text{۳ر}-\text{۸})}{\text{۳}^{\text{ر}}\,\text{ر}!}$$

(یہ شمار کنندہ کے ر اجزائے ضربی میں سے صرف ۲ مثبت ہیں اور باقی سب منفی)

$$= \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}^{\text{ر}}} \times \frac{\text{۱}\times\text{۴}\times\text{۷}\times\ldots\ldots(\text{۳ر}-\text{۸})}{\text{ر}!} \times (-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۲}}$$

# امثلہ نمبری ۱۴ ب

ذیل کے جملوں کو چار رقموں تک پھیلاؤ:

۱۔ $(\text{۱}+\text{لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ ۲۔ $(\text{۱}+\text{لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ ۳۔ $(\text{۱}-\text{لا})^{\frac{\text{۲}}{\text{۵}}}$

۴۔ $(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})^{-\text{۲}}$ ۵۔ $(\text{۱}-\text{۳لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}$ ۶۔ $(\text{۱}-\text{۳لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}}$

۷۔ $(\text{۱}+\text{۲لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ ۸۔ $(\text{۱}+\frac{\text{لا}}{\text{۳}})^{-\text{۳}}$ ۹۔ $(\text{۱}+\frac{\text{۲لا}}{\text{۳}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$

۱۰۔ $(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ا})^{-\text{۴}}$ ۱۱۔ $(\text{۲} + \text{لا})^{-\text{۳}}$ ۱۲۔ $(\text{۹} + \text{۲ لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

۱۳۔ $(\text{۸} + \text{۱۲ ا})^{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}}$ ۱۴۔ $(\text{۹} - \text{۶ لا})^{-\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ ۱۵۔ $(\text{۴ ا} - \text{۸ لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$

لکھو اور مختصر کرو۔

۱۶۔ $(\text{۱} + \text{۲ لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ کی آٹھویں رقم

۱۷۔ $(\text{۱} - \text{۲ لا}^{\text{۳}})^{\frac{\text{۱۱}}{\text{۲}}}$ کی گیارھویں رقم

۱۸۔ $(\text{۱} + \text{۳ ا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱۷}}{\text{۳}}}$ کی دسویں رقم

۱۹۔ $(\text{۳ ا} - \text{۲ ب})^{-\text{۱}}$ کی پانچویں رقم

۲۰۔ $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۲}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۱۔ $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۴}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۲۔ $(\text{۱} + \text{لا})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۳۔ $(\text{۱} + \text{لا})^{\frac{\text{۱۱}}{\text{۳}}}$ کی (ر+۱) ویں رقم

۲۴۔ $(\text{۲}^{\text{۱}} - \text{۲}^{\text{۲}}\text{لا})^{\frac{\text{۱۳}}{\text{۲}}}$ کی چودھویں رقم

۲۵۔ $(\hat{\text{۳}} + \text{۶ لا}^{\text{۴}})^{\frac{\text{۱۱}}{\text{۴}}}$ کی ساتویں رقم

۲۶۔ ثابت کرو کہ $(\text{۱} - \text{۴ لا})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $= \frac{|\text{۲ ر}}{(|\text{ر})^{\text{۲}}}$

۲۷۔ $\frac{\text{۱} - \text{لا}}{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{۲}}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{۳ر}}$ کا سر دریافت کرو۔

۲۸۔ $\frac{\text{۳} - \text{لا}}{(\text{۱} - \text{لا})^{\text{۳}}}$ کی ........... $\text{لا}^{\text{ر}}$ ...........

۲۹۔ $(\text{۱} + \text{لا})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی منفی رقم کونسی ہے؟

۳۰۔ $(\text{۱} - \text{۳ لا})^{\frac{\text{۷}}{\text{۲}}}$ کی کتنی رقمیں مثبت ہیں؟

۳۱۔ $\frac{\text{۱}}{\text{۱} + \text{۵ لا}}$ کا پھیلاؤ لا کی نزولی قوتوں میں حاصل کرو۔

**۱۸۸**۔ $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۳}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلے ن + ۱ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۳}} = \text{۱} + \text{۳}\,\text{لا} + \frac{\text{۳}\times\text{۴}}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۴}\times\text{۵}}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots$$

$$(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۱}} = \text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \cdots\cdots + \text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots$$

اب بائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو اکھٹا ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر

$$\text{۱} + \text{۳} + \frac{\text{۳}\times\text{۴}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \cdots\cdots + \frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}$$ ہے

∴ مجموعہ مطلوبہ = $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۴}}$ کی صورت تفصیلی میں

$$= \frac{(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})(\text{ن}+\text{۳})}{(\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳})}$$

**۱۸۹**۔ ظاہر ہے کہ مسئلۂ ثنائی کی مدد سے ہم $(\text{لا} + \text{ما})^{\text{ن}}$ کو ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں کیونکہ یہ جملہ ذیل کی صورتوں میں سے کسی ایک میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}}\left(\text{۱} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} \quad \text{یا} \quad \text{ما}^{\text{ن}}\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)^{\text{ن}}$$

اور صورت تفصیلی حاصل کرنے کے لیے ان صورتوں میں سے ہم پہلی یا دوسری کو استعمال کرینگے بموجب اس کے کہ

$$|\text{ما}| < \text{یا} > |\text{لا}| \text{ ہے۔}$$

**۱۹۰**۔ $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں رقم عامہ کی نہایت سادی صورت دریافت کرو۔

$$(\text{ر}+1)\text{ ویں رقم} = \frac{(-\text{ن})(-\text{ن}-1)(-\text{ن}-2)\cdots(-\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}(-\text{لا})^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{\text{ر}}\times\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}(-1)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-1)^{2\text{ر}}\times\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ $(1-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم مثبت ہے۔

اگرچہ کسی جملۂ ثنائی کی رقم عامہ دفعہ ۱۸۷ کے قاعدہ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر عام استعمال میں بہتر ہوگا کہ ہمیشہ ان تمام حالتوں میں رقم عامہ کی شکل مندرجۂ بالا استعمال کی جائے جب قوت نما منفی ہو اور شکل

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

استعمال کی جائے جب قوت نما مثبت ہو۔

**مثال - ۳** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3\text{لا}}}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-3\text{لا}}} = (1-3\text{لا})^{-\frac{1}{3}}$$

$$(\text{ر}+1)\text{ ویں رقم} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{3}+\text{ر}-1\right)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}(3\text{لا})^{\text{ر}}$$

$$= \frac{1\times4\times7\times\cdots\cdots(3\text{ر}-2)}{3^{\text{ر}}\lfloor\underline{\text{ر}}}\,3^{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{1\times4\times7\times\cdots\cdots(3\text{ر}-2)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$$

اگر جملہ مجوزہ $(۱ + ۳\,لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ ہوتا تو بھی اس کی رقم عامہ دریافت کرنے میں یہی قاعدہ استعمال کرتے فقط ۳ لا کی جگہ ۔۳ لا رکھنا پڑتا۔اس بات کو یاد رکھنا چاہیے کہ جملہ $(۱ - لا)^{-ن}$ کی صورت تفصیلی میں سب ارقام مثبت ہوتی ہیں۔

نیز $(۱ - لا)^{-۱} = ۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + \dots\dots + لا^{ر} + \dots\dots$

$$(۱ - لا)^{-۲} = ۱ + ۲\,لا + ۳\,لا^{۲} + ۴\,لا^{۳} + \dots + (ر + ۱)\,لا^{ر} + \dots$$

[مقابلہ کرو دفعہ ۱۸۲ سے]

$$(۱ - لا)^{-۳} = ۱ + ۳\,لا + ۶\,لا^{۲} + ۱۰\,لا^{۳} + \dots\dots + \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۱ \times ۲}\,لا^{ر} + \dots\dots$$

**۱۹۱**۔جملہ $(۱ + لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرنے کی پوری تحقیقات اس صورت میں جبکہ ن کی قیمت پر کوئی قید نہ ہو دفعہ ۱۹۳ میں کی جائیگی۔تاہم کسی مثال حسابیہ کے حل کرنے میں طالب علم کو ترکیب دفعہ ۱۶۷ استعمال کرنے میں کوئی دقت نہ ہوگی۔

**مثال**۔جملہ $(۱ + لا)^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ $لا = \frac{۲}{۳}$ اور $ن = ۲۰$

اگر $ق_{ر}$ سے ر ویں رقم تعبیر کی جائے تو

$$ق_{ر+۱} = \frac{ن + ر - ۱}{ر} \times لا \times ق_{ر}$$ بلحاظ عددی قیمت کے

$$= \frac{۱۹ + ر}{ر} \times \frac{۲}{۳} \times ق_{ر}$$

$$\therefore \quad |ق_{ر+۱}| > |ق_{ر}|$$

جب تک کہ $\frac{۲(۱۹ + ر)}{۳\,ر} > ۱$

یعنی $ر > ۳۸$

اس لیے ۳۷ تک ر کی تمام قیمتوں کے لیے $ق_{ر+۱} > ق_ر$ لیکن اگر ر = ۳۸ تو $ق_{ر+۱} = ق_ر$ اور یہی سب سے بڑی رقمیں ہیں پس ۳۸ ویں اور ۳۹ ویں رقمیں بلحاظ عددی قیمت کے آپس میں برابر ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں۔

# تقربات

**۱۹۲**۔ اگر عہ کوئی چھوٹی کسر واجب ہو تو $عہ^۲$ بمقابل عہ کے ایک چھوٹی کسر ہوگی۔ پس اگر عہ نہایت ہی قلیل ہو تو تقریبی حسابات میں $عہ^۲$ بمقابل عہ کے یا $عہ^۳$ بمقابلہ $عہ^۲$ کے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اگر معمولی تقرب مطلوب ہو تو ہم عہ کی اُن سب قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں جن کا درجہ ایک سے بڑا ہے۔ اگر اس سے بہتر تقرب مطلوب ہو تو ایسی رقموں کو رکھ سکتے ہیں جن میں $عہ^۲$ شامل ہو اور اس سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور اسی طرح ہر حالت میں مطلوبہ درجہ صحت تک نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔

$$(۱ + عہ)^۲ = ۱ + ۲ عہ + عہ^۲$$

$\therefore$ $(۱ + عہ)^۲$ کی تقریبی قیمت ۱ + ۲ عہ ہے

$$(۱ + عہ)^۳ = ۱ + ۳ عہ + ۳ عہ^۲ + عہ^۳$$

اس لیے ۱ + ۳ عہ تقریبی قیمت ہے $(۱ + عہ)^۳$ کی۔ اس سے اچھا تقرب $۱ + ۳ عہ + ۳ عہ^۲$ ہے

اسی طرح سے $(۱ + عہ)^ن = ۱ + ن عہ + \frac{ن (ن - ۱)}{۱ \times ۲} عہ^۲ + \dots\dots$

= ۱ + ن عہ (تخمیناً) جہاں عہ ایک چھوٹی کسر واجب ہے۔

نیز جب عہ اور بہ دو چھوٹی کسریں ہوں تو

$(1+عہ)^{م}(1+بہ)^{ن} = (1+م\,عہ)(1+ن\,بہ)$ (تقریباً)

$= 1+م\,عہ+ن\,بہ$ (تقریباً)

اگر حاصل ضرب م ن عہ بہ کو نظر انداز کر دیا جائے جو عہ اور بہ کے مقابلہ میں قلیل ہے

مثال (۱)۔ $(1+3لا)^{\frac{1}{2}}(1-2لا)^{-\frac{1}{3}}$ کی صورت تفصیلی ہیں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

ان ثنائی جملوں کے پھیلاؤ کی پہلی تین رقمیں لینے سے حاصل ہوگا۔

$(1+\frac{3}{2}لا-\frac{9}{8}لا^{2}-\ldots\ldots)(1+\frac{2}{3}لا+\frac{8}{9}لا^{2}+\ldots\ldots)$

$=1+لا(\frac{3}{2}+\frac{2}{3})+لا^{2}(\frac{8}{9}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{9}{8})+\ldots\ldots$

$=1+\frac{13}{6}لا+\frac{55}{72}لا^{2}$

اگر اس مثال میں لا = ۰۰۲ء یعنی $لا^{2}$ = ۰۰۰۰۴ء تو ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری رقم ایک ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں ملحوظ عدد سے پہلے پانچ صفر ہیں۔ اس لیے اگر جملہ معلومہ کی قیمت اعشاریہ کے پانچ مقام تک مطلوب ہو تو $لا^{2}$ والی رقم کو نظر انداز کر کے

$1+\frac{13}{6}لا$ میں لا کی بجائے ۰۰۲ء رکھنا کافی ہوگا۔

مثال (۲)۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جا سکیں تو $\frac{(1+\frac{2}{3}لا)^{-5}+\sqrt{4+2لا}}{\sqrt{(4+لا)^{3}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ بموجب فرض $لا^{2}$ اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز

کی جاسکتی ہیں، اس لیے ہر ایک جملۂ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\text{پس دیا ہوا جملہ} = \frac{(۱+\frac{۲}{۳}\text{لا})^{-۵}+۲(۱+\frac{\text{لا}}{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{۸(۱+\frac{\text{لا}}{۴})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{(۱-\frac{۱۰}{۳}\text{لا})+۲(۱+\frac{۱}{۴}\text{لا})}{۸(۱+\frac{۳}{۸}\text{لا})}$$

$$= \frac{۱}{۸}(۳-\frac{۱۷}{۶}\text{لا})(۱+\frac{۳}{۸}\text{لا})^{-۱}$$

$$= \frac{۱}{۸}(۳-\frac{۱۷}{۶}\text{لا})(۱-\frac{۳}{۸}\text{لا})$$

$= \frac{۱}{۸}(۳-\frac{۹۵}{۲۴}\text{لا})$، اگر اس رقم کو نظر انداز کیا جائے جس میں $\text{لا}^۲$ شامل ہے۔

**مثال (۳)** ۔ $\frac{۱}{\sqrt{۴۷}}$ کی قیمت اعشاریہ کے چار مقام تک دریافت کرو۔

$$\frac{۱}{\sqrt{۴۷}} = (۴۷)^{-\frac{۱}{۲}} = (۷^۲-۲)^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۷}(۱-\frac{۲}{۷^۲})^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۷}(۱+\frac{۱}{۷^۲}+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۷^۴}+\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۷^۶}+\ldots\ldots)$$

$$= \frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷^۳}+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۷^۵}+\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۷^۷}+\ldots\ldots$$

مختلف رقموں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں یوں عمل کرنا چاہیے۔

$$۷\,)\;۱$$

$$۷\,)\;ء۱۴۲۸۵۷ \;\ldots\ldots\; = \frac{۱}{۷}$$

$$۷\,)\;ء۰۲۰۴۰۸$$

$$۷\,)\;ء۰۰۲۹۱۵ \;\ldots\ldots\; = \frac{۱}{۷^۳}$$

$$۷\,)\;ء۰۰۰۴۱۶$$

$$ء۰۰۰۰۵۹ \;\ldots\ldots\; = \frac{۱}{۷^۵}$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ رقم $\frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۷^۷}$ ایسی کسر اعشاریہ ہے جو پانچ صفروں سے شروع ہوتی ہے۔

$$\therefore \frac{۱}{\sqrt{۴۷}} = ء۱۴۲۸۵۷ + ء۰۰۲۹۱۵ + ء۰۰۰۰۸۸$$

= ء۱۴۵۸۶ اور یہ نتیجہ کم از کم اعشاریہ کے چار مقام تک صحیح ہے۔

**مثال ۴ ۔** ۱۲۶ کا جذر الکعب اعشاریہ کے پانچ مقام تک نکالو

$$(۱۲۶)^{\frac{۱}{۳}} = (۵^۳ + ۱)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= ۵\left(۱ + \frac{۱}{۵^۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$= ۵\left(۱ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵^۳} - \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۵^۶} + \frac{۵}{۸۱} \times \frac{۱}{۵^۹} - \ldots\ldots\right)$$

$$= ۵ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵^۲} - \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۵^۵} + \frac{۱}{۸۱} \times \frac{۱}{۵^۷} - \ldots\ldots$$

$$= ۵ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲^۲}{۱۰^۲} - \frac{۱}{۹} \times \frac{۲^۵}{۱۰^۵} + \frac{۱}{۸۱} \times \frac{۲^۷}{۱۰^۷} - \ldots\ldots$$

$$= ۵ + \frac{ء۰۴}{۳} - \frac{ء۰۰۰۳۲}{۹} + \frac{ء۰۰۰۰۱۲۸}{۸۱} - \ldots\ldots$$

$$= ۵ + ء۰۱۳۳۳\ldots - ء۰۰۰۳۵\ldots + \ldots\ldots$$

= ۵ء۰۱۳۲۹ اعشاریہ کے پانچ مقام تک۔

# امثلہ نمبری ۱۴ ج

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں (ر + ۱) ویں رقم دریافت کرو۔

۱۔ $(۱ + \text{لا})^{-\frac{۱}{۲}}$ ۲۔ $(۱ - \text{لا})^{-۵}$ ۳۔ $(۱ + ۳\text{لا})^{\frac{۱}{۳}}$

۴۔ $(۱ + \text{لا})^{-\frac{۲}{۳}}$ ۵۔ $(۱ + \text{لا}^{۲})^{-۳}$ ۶۔ $(۱ - ۲\text{لا})^{-\frac{۳}{۲}}$

۷۔ $(\text{د} + \text{ب لا})^{-۱}$ ۸۔ $(۲ - \text{لا})^{-۲}$ ۹۔ $\sqrt[۳]{(\text{د}^{۳} - \text{لا}^{۳})^{۲}}$

۱۰۔ $\frac{۱}{\sqrt{۱ + ۲\text{لا}}}$ ۱۱۔ $\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۱ - ۳\text{لا})^{۲}}}$ ۱۲۔ $\frac{۱}{\sqrt[\text{ن}]{\text{د}^{\text{ن}} - \text{ن لا}}}$

ذیل کے جملوں کی تفصیلی صورتوں میں بلحاظ عددی قیمت کے بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

۱۳۔ $(۱ + \text{لا})^{-۷}$ جبکہ $\text{لا} = \frac{۴}{۱۵}$

۱۴۔ $(۱ + \text{لا})^{\frac{۲۱}{۲}}$ جبکہ $\text{لا} = \frac{۲}{۳}$

۱۵۔ $(۱ - ۷\text{لا})^{-\frac{۱۱}{۴}}$ جبکہ $\text{لا} = \frac{۱}{۸}$

۱۶۔ $(۳\text{لا} + ۵\text{ما})^{۱۲}$ جبکہ $\text{لا} = ۸$ اور $\text{ما} = ۳$

۱۷۔ $(۵ - ۴\text{لا})^{-۷}$ جبکہ $\text{لا} = \frac{۱}{۲}$

۱۸۔ $(۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{ما}^{۳})^{-\text{ن}}$ جبکہ $\text{لا} = ۹$، $\text{ما} = ۲$، $\text{ن} = ۱۵$

مندرجۂ ذیل کی قیمتیں اعشاریہ کے پانچ مقام تک معلوم کرو۔

۱۹۔ $\sqrt{۹۸}$ ۲۰۔ $\sqrt[۳]{۹۹۸}$ ۲۱۔ $\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$

۲۲۔ $\sqrt[۴]{۲۴۰۰}$ ۲۳۔ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۲۸}}$ ۲۴۔ $(۱\frac{۱}{۲۵۰})^{\frac{۱}{۴}}$

۲۵۔ $(۶۳۰)^{-\frac{۳}{۴}}$ ۲۶۔ $\sqrt[۵]{۳۱۲۸}$

اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بڑی قوتیں نظر انداز کی جا سکیں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۷۔ $(۱ - ۷\,لا)^{\frac{۱}{۳}}(۱ + ۲\,لا)^{-\frac{۳}{۴}}$

۲۸۔ $\sqrt{۴ - لا} \times \left(۳ - \frac{لا}{۲}\right)^{-۱}$

۲۹۔ $\frac{(۸ + ۳\,لا)^{\frac{۲}{۳}}}{(۲ + ۳\,لا)\sqrt{۴ - ۵\,لا}}$

۳۰۔ $\frac{\left(۱ + \frac{۲}{۳}\,لا\right)^{-۵} \times (۴ + ۳\,لا)^{\frac{۱}{۲}}}{(۴ + لا)^{\frac{۳}{۲}}}$

۳۱۔ $\frac{\sqrt[۴]{۱ - \frac{۳}{۵}\,لا} + \left(۱ + \frac{۵}{۹}\,لا\right)^{-۶}}{\sqrt[۳]{۱ + ۲\,لا} + \sqrt[۵]{۱ - \frac{لا}{۲}}}$

۳۲۔ $\frac{\sqrt[۳]{۸ + ۳\,لا} - \sqrt[۵]{۱ - لا}}{(۱ + ۵\,لا)^{\frac{۳}{۵}} + \left(۴ + \frac{لا}{۴}\right)^{\frac{۱}{۲}}}$

۳۳۔ ثابت کرو کہ $(۱ - ۴\,لا)^{\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{ر}$ کا سر $\frac{|۲ر}{(|ر)^{۲}}$ ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ $(۱ + لا)^{ن}$

$$= ۲^{ن}\left\{۱ - ن\,\frac{۱ - لا}{۱ + لا} + \frac{ن(ن + ۱)}{۱ \times ۲}\left(\frac{۱ - لا}{۱ + لا}\right)^{۲} + \cdots\cdots\right\}$$

۳۵۔ $\frac{۱}{(۱ + لا)^{۲}\sqrt{۱ + ۴\,لا}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

۳۶۔ $\frac{(۱ + لا)^{-\frac{۳}{۴}} + \sqrt{۱ + ۵\,لا}}{(۱ - لا)^{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ $(\text{۱} - \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ن واں سر (ن-۱) ویں سر کا دوچند ہے۔

۱۹۳۔ ن کی کسی ناطق قیمت کے لیے $(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں بلحاظ عددی قیمت کے بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

چونکہ ہمیں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے تعلق ہے اس لیے ہم لا کو ہمیشہ مثبت خیال کرینگے۔

**صورت اول**۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

(ر + ۱) ویں رقم رویں رقم کو $\frac{\text{ن} - \text{ر} + \text{۱}}{\text{ر}} \times \text{لا}$ سے یعنی $\left(\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right)\text{لا}$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ رقمیں یکے بعد دیگرے بڑھتی جاتی ہیں جب تک کہ

$$\left(\frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right)\text{لا} > \text{۱}$$

یعنی

$$\frac{(\text{ن}+\text{۱})\text{لا}}{\text{ر}} > \text{۱} + \text{لا}$$

یا

$$\frac{(\text{ن}+\text{۱})\text{لا}}{\text{۱}+\text{لا}} > \text{ر}$$

اب اگر $\frac{(\text{ن}+\text{۱})\text{لا}}{\text{۱}+\text{لا}}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ف سے تعبیر کرو؛ تب اگر ر = ف تو ضارب جزو ضربی ایک کے برابر ہے اور (ف +۱) ویں رقم ف ویں رقم کے برابر ہے، اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(\text{ن}+\text{۱})\text{لا}}{\text{۱}+\text{لا}}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو اس صورت میں ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہے اور (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

## صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن کسر مثبت ہے۔

حسب سابق (ر + ۱) ویں رقم رویں رقم کو $\left(\frac{ن + ۱}{ر} - ۱\right)$ لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اب اگر لا ایک سے بڑا ہو تو ر کو کافی طور پر بڑھانے سے مندرجۂ بالا جز و ضربی (۔ لا) کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس طرح سے کسی خاص رقم کے بعد ہر ایک رقم بلحاظ عددی قیمت کے اپنی رقم ماقبل کی تقریباً لا گنی ہو سکتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ رقمیں متواتر بڑھتی جاتی ہیں اور اس صورت میں کوئی رقم ایسی نہیں ہے جو باقی سب رقموں سے بڑی ہو۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضارب جز و ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے جب تک کہ ر کی قیمت ن + ۱ سے بڑی نہیں ہو جاتی اور اس مقام سے اس کی قیمت منفی ہو جاتی ہے مگر بلحاظ عددی قیمت کے ہمیشہ ایک سے کم رہتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ اس صورت میں بڑی سے بڑی رقم وجود رکھتی ہے۔

حسب سابق ضارب جز و ضربی ایک سے بڑا ہوگا جب تک کہ $\frac{(ن + ۱) لا}{۱ + لا} > ر$

اگر $\frac{(ن + ۱) لا}{۱ + لا}$ صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کرو، تب صورت اول کی طرح (ف + ۱) ویں رقم ف ویں رقم کے برابر ہے اور یہی رقمیں باقی رقموں سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(ن + ۱) لا}{۱ + لا}$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ق اس کا صحیح حصہ ہے، تب ظاہر ہے کہ (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

## صورت سوم۔ فرض کرو کہ ن منفی ہے۔

یعنی فرض کرو کہ ن = - م جہاں م مثبت مقدار ہے، اس صورت میں ضارب جزو ضربی کی عددی قیمت $\frac{\text{م} + \text{ر} - 1}{\text{ر}} \times \text{لا}$ یعنی $\left(\frac{\text{م} - 1}{\text{ر}} + 1\right)\text{لا}$ ہوگی۔

(۱) اگر لا ایک سے بڑا ہو تو صورت دوم کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ صورت تفصیلی میں کوئی ایسی رقم نہیں ہے جو باقی سب سے بڑی ہے۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو ضارب جزو ضربی ایک سے بڑا ہوگا۔

جب تک کہ
$$\left(\frac{\text{م} - 1}{\text{ر}} + 1\right)\text{لا} > 1$$

یعنی
$$\frac{(\text{م} - 1)\text{لا}}{\text{ر}} > 1 - \text{لا}$$

یا
$$\frac{(\text{م} - 1)\text{لا}}{1 - \text{لا}} > \text{ر}$$

اگر $\frac{(\text{م} - 1)\text{لا}}{1 - \text{لا}}$ مثبت صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کرو، تب (ف + ۱) ویں رقم ف ویں رقم کے برابر ہوگی اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(\text{م} - 1)\text{لا}}{1 - \text{لا}}$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ق اس کا صحیح حصّہ ہے اس صورت میں (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{(\text{م} - 1)\text{لا}}{1 - \text{لا}}$ منفی ہو تو م ایک سے کم ہوگا اور ضارب جزو ضربی کو بصورت $\left(1 - \frac{1 - \text{م}}{\text{ر}}\right)\text{لا}$ لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک سے

کم رہیگا، اس لیے ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے کم ہوگی۔ پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں پہلی رقم سب سے بڑی ہے۔

۱۹۴ - ن حروف ا، ب، ج ........ اور ان کی مختلف قوتوں سے جو ر ابعاد کے متجانس حاصل ضرب بن سکیں اُن کی تعداد دریافت کرو۔

عمل تقسیم سے یا مسئلۂ ثنائی سے

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} = 1 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2\,\text{لا}^2 + \text{ا}^3\,\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} = 1 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{لا}^2 + \text{ب}^3\,\text{لا}^3 + \dots\dots$$

$$\frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} = 1 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^2\,\text{لا}^2 + \text{ج}^3\,\text{لا}^3 + \dots\dots$$

.....................................................

ضرب دینے سے

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \dots\dots$$

$$= (1 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2\,\text{لا}^2 + \dots)(1 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{لا}^2 + \dots)(1 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^2\,\text{لا}^2 + \dots)\dots$$

$$= 1 + \text{لا}(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \dots) + \text{لا}^2(\text{ا}^2 + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ا}\,\text{ج} + \text{ب}^2 + \text{ب}\,\text{ج} + \text{ج}^2 + \dots) + \dots$$

$$= 1 + \text{ص}_1\,\text{لا} + \text{ص}_2\,\text{لا}^2 + \text{ص}_3\,\text{لا}^3 + \dots\dots \quad (\text{فرض کرو})$$

جہاں $\text{ص}_1$، $\text{ص}_2$، $\text{ص}_3$ ........ ایک، دو، تین، ........ ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جو حروف ا، ب، ج ........ اور ان کی قوتوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

ان حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ا، ب، ج ........ میں سے ہر ایک حرف کو ایک کے برابر رکھو، اس طرح کرنے سے $\text{ص}_1$، $\text{ص}_2$، $\text{ص}_3$ ........ میں ہر ایک رقم ۱ کے برابر

ہو جاتی ہے اس لیے $\text{ص}_1$، $\text{ص}_2$، $\text{ص}_3$ ............ کی جو قیمتیں اس طرح سے حاصل ہوتی ہیں وہ ایک، دو، تین ............ ابعاد کی متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہیں۔

نیز $\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \cdots\cdots$

بن جائیگا۔ $\frac{1}{(1-\text{لا})^{\text{ن}}}$ یا $(1-\text{لا})^{-\text{ن}}$

اس لیے $\text{ص}_{\text{ر}}$ = $(1-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\underline{|\text{ر}}}$$

$$= \frac{\underline{|\text{ن}+\text{ر}-1}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-1}}$$

**۱۹۵ ـ** کسی جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی میں تعداد ارقام دریافت کرو، جبکہ قوت نما مثبت صحیح عدد ہو۔

$(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ر}})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کے ابعاد ن ہیں اس لیے رقموں کی تعداد ن ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو ر مقادیر $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$، $\text{ا}_3$ ............ $\text{ا}_{\text{ر}}$ اور ان کی مختلف قوتوں کو اکھٹا لینے سے بنتے ہیں اس لیے دفعہ گزشتہ کی مدد سے تعداد مطلوبہ $\frac{\underline{|\text{ر}+\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}}\ \underline{|\text{ر}-1}}$ ہے۔

**۱۹۶ ـ** نتیجہ دفعہ ۱۹۴ سے ہم ن اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے متعلق ایک مسئلہ مستنبط کر سکتے ہیں۔

ن حروف ا، ب، ج، د، ............ پر غور کرو۔

اگر ہم ر ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضرب مرتب کریں جو ان حروف اور ان کی مختلف قوتوں سے بن سکتے ہیں تو ہر ایک حاصل ضرب ن حروف میں سے ر، ر حروف کا ایک ایسا اجتماع ہوگا جس میں کوئی ایک حرف ایک، دو، تین، ......... ر دفعہ شامل ہو سکتا ہے۔
اس لیے معلوم ہوا کہ ن اشیاء میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ تکرار کی اجازت ہو ر ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو ن حروف اور ان کی مختلف قوتوں سے بن سکتے ہیں اور اس لیے

$$= \frac{\lfloor ن + ر - ۱}{\lfloor ر \ \lfloor ن - ۱} = {}_{ن + ر - ۱}ج_{ر}$$

یعنی ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ اشیاء کی تکرار کی اجازت ہو برابر ہے ن + ر - ۱ اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے جبکہ تکرار کی اجازت نہ ہو۔

۱۹۷ - ہم اس باب کو چند متفرق مثالوں کے حل سے ختم کرینگے۔

## مثال ۱ - $\frac{(۱ - ۲ لا)^۲}{(۱ + لا)^۳}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^ر$ کا سر دریافت کرو۔

صورت تفصیلی = $(۱ - ۴ لا + ۴ لا^۲)(۱ + ف_۱ لا + ف_۲ لا^۲ + ...... + ف_ر لا^ر + ......)$
[فرض کرو]

اب $لا^ر$ کا سر $ف_ر$، $ف_{ر-۱}$، $ف_{ر-۲}$ کو بالترتیب ۱، -۴، ۴ سے ضرب دینے اور مختلف حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔
اس لیے

سر مطلوب = $ف_ر - ۴ ف_{ر-۱} + ۴ ف_{ر-۲}$

لیکن $ف_ر = (-۱)^ر \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۲}$ [دفعہ ۱۸۷ مثال ۳]

اس لیے سر مطلوب

$$=(-۱)^{ر}\frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۲}-۴(-۱)^{ر-۱}\frac{ر(ر+۱)}{۲}+۴(-۱)^{ر-۲}\frac{ر(ر-۱)}{۲}$$

$$=\frac{(-۱)^{ر}}{۲}\left[(ر+۱)(ر+۲)+۴ر(ر+۱)+۴ر(ر-۱)\right]$$

$$=\frac{(-۱)^{ر}}{۲}(۹ر^{۲}+۳ر+۲)$$

**مثال ۲ ۔** سلسلۂ ذیل کی قیمت دریافت کرو۔

$$۲+\frac{۵}{۳\times \lfloor ۲}+\frac{۷\times۵}{۳^{۲}\times \lfloor ۳}+\frac{۹\times۷\times۵}{۳^{۳}\times \lfloor ۴}+\cdots\cdots$$

دیا ہوا سلسلہ $=۲+\frac{۱}{۳^{۲}}\times\frac{۵\times۳}{\lfloor ۲}+\frac{۱}{۳^{۳}}\times\frac{۷\times۵\times۳}{\lfloor ۳}$

$$+\frac{۱}{۳^{۴}}\times\frac{۹\times۷\times۵\times۳}{\lfloor ۴}+\cdots\cdots$$

$$=۲+\frac{۲^{۲}}{۳^{۲}}\times\frac{\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{\lfloor ۲}+\frac{۲^{۳}}{۳^{۳}}\times\frac{\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{\lfloor ۳}+\frac{۲^{۴}}{۳^{۴}}\times\frac{\frac{۹}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{\lfloor ۴}+\cdots$$

$$=۱+\frac{۲}{۳}\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۱}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\frac{\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{\lfloor ۲}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\frac{\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}{\lfloor ۳}+\cdots\cdots$$

$$=\left(۱-\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۳}{۲}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-\frac{۳}{۲}}=۳^{\frac{۳}{۲}}=۳\sqrt{۳}$$

**مثال ۳ ۔** اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۳+\sqrt{۷})^{ن}$ کا صحیح حصہ ایک طاق عدد ہے۔

فرض کرو کہ $(۳+\sqrt{۷})^{ن}$ کا صحیح حصہ ع ہے اور مکسور حصہ ک سے تعبیر ہوتا ہے تب

$$\text{ع} + \text{ک} = ۳^{\text{ن}} + \text{ج}_۱\, ۳^{\text{ن}-۱} \sqrt{۷} + \text{ج}_۲\, ۳^{\text{ن}-۲} \times ۷ + \text{ج}_۳\, ۳^{\text{ن}-۳} (\sqrt{۷})^۳ + \ldots (۱)$$

اب $(۳ - \sqrt{۷})$ مثبت ہے اور ایک سے کم ہے اس لیے $(۳ - \sqrt{۷})^{\text{ن}}$ ایک کسر واجب ہے، اس کو کَ سے تعبیر کرو۔

$$\therefore \text{کَ} = ۳^{\text{ن}} - \text{ج}_۱\, ۳^{\text{ن}-۱} \times \sqrt{۷} + \text{ج}_۲\, ۳^{\text{ن}-۲} \times ۷$$

$$- \text{ج}_۳\, ۳^{\text{ن}-۳} (\sqrt{۷})^۳ + \ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے غیر ناطق رقمیں خارج ہو جائیں گی اور حاصل ہوگا۔

$$\text{ع} + \text{ک} + \text{کَ} = ۲(۳^{\text{ن}} + \text{ج}_۲\, ۳^{\text{ن}-۲} \times ۷ + \ldots\ldots)$$

= ایک جفت عدد

مگر چونکہ ک اور کَ کسور واجب ہیں اس لیے ضروری ہے کہ ان کا مجموعہ ۱ کے برابر ہو پس معلوم ہوا کہ ع طاق عدد ہے۔

# امثلہ نمبری ۴ اد

سر دریافت کرو۔

۱- $\frac{۳ - ۵\,\text{لا}}{(۱ - \text{لا})^۲}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{۱۰۰}$ کا

۲- $\frac{۴ + ۲\,\text{لا} - \text{لا}^۲}{(۱ + \text{لا})^۳}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{۱۲}$ کا

۳- $\frac{۳\,\text{لا}^۲ - ۲}{\text{لا} + \text{لا}^۲}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا

۴- $\frac{۲ + \text{لا} + \text{لا}^۲}{(۱ + \text{لا})^۳}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا

۵ - ثابت کرو کہ

$$۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} \times \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۴} - \frac{۱}{۲^۳} \times \frac{۱ \times ۳ \times ۵}{۲ \times ۴ \times ۶} + \frac{۱}{۲^۴} \times \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸} - \cdots = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۶ - ثابت کرو کہ

$$\sqrt{۸} = ۱ + \frac{۳}{۴} + \frac{۳ \times ۵}{۴ \times ۸} + \frac{۳ \times ۵ \times ۷}{۴ \times ۸ \times ۱۲} + \cdots\cdots$$

۷ - ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۲\text{ن}}{۳} + \frac{۲\text{ن}(۲\text{ن} + ۲)}{۳ \times ۶} + \frac{۲\text{ن}(۲\text{ن} + ۲)(۲\text{ن} + ۴)}{۳ \times ۶ \times ۹} + \cdots\cdots$$

$$= ۲^{\text{ن}} \left\{ ۱ + \frac{\text{ن}}{۳} + \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)}{۳ \times ۶} + \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)(\text{ن} + ۲)}{۳ \times ۶ \times ۹} + \cdots \right\}$$

۸ - ثابت کرو کہ

$$۷^{\text{ن}} \left\{ ۱ + \frac{\text{ن}}{۷} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - ۱)}{۷ \times ۱۴} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - ۲)}{۷ \times ۱۴ \times ۲۱} + \cdots\cdots \right\}$$

$$= ۴^{\text{ن}} \left\{ ۱ + \frac{\text{ن}}{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)}{۲ \times ۴} + \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)(\text{ن} + ۲)}{۲ \times ۴ \times ۶} + \cdots\cdots \right\}$$

۹ - ثابت کرو کہ جب لا نہایت چھوٹا ہو تو

$$\frac{۳\left(\text{لا} + \frac{۴}{۹}\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(۱ - \frac{۳}{۴}\text{لا}^۲\right)^{\frac{۱}{۳}}}{۲\left(۱ + \frac{۹}{۱۶}\text{لا}\right)^۲} = ۱ - \frac{۳۰۷}{۲۵۶}\text{لا}^۲ \quad \text{(تقریباً)}$$

۱۰ - ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(۵ + ۲\sqrt{۶})^{\text{ن}}$ کا صحیح حصہ طاق ہوگا

۱۱ - ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(۸ + ۳\sqrt{۷})^{\text{ن}}$ کا صحیح حصہ طاق ہوگا۔

۱۲ - $(۱ - ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^۲ - ۴\text{لا}^۳ + \cdots\cdots)^{-\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر دریافت کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ $(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}})^{2\text{ن}}$ کی درمیانی $(1 - 4\text{لا})^{-(\text{ن}+\frac{1}{2})}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر کے برابر ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ $(1 - \text{لا}^3)^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی صورت ذیل میں بھی لکھی جا سکتی ہے۔

$$(1-\text{لا})^{3\text{ن}} + 3\text{ن}\,\text{لا}(1-\text{لا})^{3\text{ن}-2} + \frac{3\text{ن}(3\text{ن}-3)}{1\times 2}\text{لا}^2(1-\text{لا})^{3\text{ن}-4} + \dots$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1+\text{لا}+\text{لا}^2}$ کی صورتِ تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ۱، ۰، ‎-۱ ہوگا اگر ن کی شکل بالترتیب ۳م، ۳م-۱، یا ۳م + ۱ ہو۔

۱۶۔ $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})^{\text{ن}}$ کی صورتِ تفصیلی میں (۱) تعدادِ ارقام (۲) رقموں کے سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۷۔ اگر ن جفت عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\lfloor 1 \, \lfloor \text{ن}-1} + \frac{1}{\lfloor 3 \, \lfloor \text{ن}-3} + \frac{1}{\lfloor 5 \, \lfloor \text{ن}-5} + \dots + \frac{1}{\lfloor \text{ن}-1 \, \lfloor 1} = \frac{2^{\text{ن}-1}}{\lfloor \text{ن}}$$

۱۸۔ اگر $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $\text{ج}_0، \text{ج}_1، \text{ج}_2 \dots\dots \text{ج}_{\text{ن}}$ ہوں جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{ج}_0 - \text{ج}_1 + \text{ج}_2 - \text{ج}_3 + \dots\dots + (-1)^{\text{ر}}\text{ج}_{\text{ر}}$

$$= (-1)^{\text{ر}} \frac{\lfloor \text{ن}-1}{\lfloor \text{ر} \, \lfloor \text{ن}-\text{ر}-1}$$

(۲) $\text{ج}_0 - 2\text{ج}_1 + 3\text{ج}_2 - 4\text{ج}_3 + \dots\dots + (-1)^{\text{ن}}(\text{ن}+1)\text{ج}_{\text{ن}} = 0$

(۳) $\text{ج}_0^2 - \text{ج}_1^2 + \text{ج}_2^2 - \text{ج}_3^2 + \dots\dots + (-1)^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}^2 = 0$ اگر ن طاق ہو

اور $= (-1)^{\frac{ن}{2}} ج_{\frac{ن}{2}}$ اگر ن جفت ہو۔

**۱۹۔** اگر $ص_ن$ پہلے ن طبعی عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ

(۱) $(1-لا)^{-3} = ص_1 + ص_2 لا + ص_3 لا^2 + \dots + ص_ن لا^{ن-1} + \dots$

(۲) $2(ص_1 ص_ن + ص_2 ص_{ن-1} + \dots + ص_ن ص_1) = \frac{|\underline{ن+4}}{|\underline{5}\ |\underline{ن-1}}$

**۲۰۔** اگر $ق_ن = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots (2ن-1)}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots 2ن}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $ق_{2ن+1} + ق_1 ق_{2ن} + ق_2 ق_{2ن-1} + \dots + ق_ن ق_{ن+2} + ق_ن ق_{ن+1} = \frac{1}{2}$

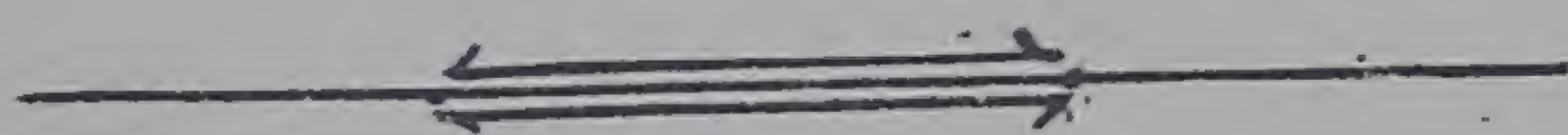
(۲) $2\{ق_{2ن} - ق_1 ق_{2ن-1} + ق_2 ق_{2ن-2} + \dots + (-1)^{ن-1} ق_{ن-1} ق_{ن+1}\}$

$= ق_{2ن} + (-1)^{ن-1} ق_ن^2$

**۲۱۔** $(1+لا)^ن$ کی صورت تفصیلی کے سروں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ دریافت کرو جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو۔

**۲۲۔** اگر $(7 + 4\sqrt{3})^ن = ف + بہ$ جہاں ن اور ف مثبت صحیح عدد ہیں اور بہ کسر واجب ہے تو ثابت کرو کہ $(1 - بہ)(ف + بہ) = 1$

**۲۳۔** اگر $(1 + لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر $ج_0$، $ج_1$، $ج_2$، ……$ج_ن$ ہوں، جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے، تو ثابت کرو کہ

$ج_1 - \frac{ج_2}{2} + \frac{ج_3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{ن-1} ج_ن}{ن} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{ن}$

# باب پانزدہم

## مسئلہ کثیر الارقام

۱۹۸ - اس سے پہلے ہم نے دفعہ ۱۰۷ میں دیکھا ہے کہ مسئلہ دو شناقی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کی صورتِ تفصیلی حاصل ہو سکتی ہے، اس باب میں ہمارا مقصد جملہ کثیر الارقام کی مکمل صورتِ تفصیلی حاصل کرنا اتنا نہیں ہے جتنا کہ کسی رقم معینہ کا سر دریافت کرنا۔

**مثال** ۔ جملہ $(ا + ب + ج + د)^{14}$ کی صورتِ تفصیلی میں $ا^{4} ب^{2} ج^{3} د^{5}$ کا سر دریافت کرو۔

مطلوبہ صورتِ تفصیلی ۱۴ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جزو ضربی $(ا + ب + ج + د)$ ہے، نیز صورتِ تفصیلی میں ہر ایک رقم کی قوتوں کا مجموعہ ۱۴ ہے کیونکہ یہ ۱۴ اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے، پس رقم $ا^{4} ب^{2} ج^{3} د^{5}$ کو مرتب کرنے کے لیے ہمیں ا کو چودہ اجزائے ضربی میں سے کسی چار اجزائے ضربی سے، ب کو باقی ماندہ دس اجزائے ضربی میں سے کسی دو اجزائے ضربی سے، اور ج کو باقی ماندہ آٹھ اجزائے ضربی میں سے کسی تین اجزائے ضربی سے لینا

چاہیے لیکن ایسا کرنے کے کل طریقوں کی تعداد صریحاً ۱۴ ایسے حروف کو باہم ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں سے چار تو ا ہیں، دو ب، تین ج اور پانچ د یعنی

$$= \frac{\lfloor 14}{\lfloor 4 \; \lfloor 2 \; \lfloor 3 \; \lfloor 5}$$

اس لیے معلوم ہوا کہ رقم $ا^{۴} ب^{۲} ج^{۳} د^{۵}$ آخری حاصل ضرب میں $\frac{\lfloor 14}{\lfloor 4 \; \lfloor 2 \; \lfloor 3 \; \lfloor 5}$ دفعہ شامل ہوتی ہے اس لیے سر مطلوب = ۲۵۲۲۵۲۰

۱۹۹ - $(ا + ب + ج + د + \ldots\ldots)^{ع}$ کی صورت تفصیلی میں کسی رقم معینہ کا سر دریافت کرو، اس میں ع مثبت صحیح عدد ہے

مطلوبہ صورت تفصیلی ایسے ع اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جزو ضربی ا + ب + ج + د + ...... کے برابر ہے اب چونکہ صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم ان ع اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے اس لیے آخری حاصل ضرب میں کسی رقم $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{لہ} \ldots\ldots$ کے شامل ہونے کے کل طریقوں کی تعداد ایسے ع حروف کی مختلف ترتیبوں کی تعداد کے برابر ہے جن میں ا کی تعداد عہ ہو، ب کی تعداد بہ ہو اور ج کی تعداد جہ اور علیٰ ہذا القیاس - یعنی

$ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{لہ} \ldots\ldots$ کا سر ہے۔

$$\frac{\lfloor ع}{\lfloor عہ \; \lfloor بہ \; \lfloor جہ \; \lfloor لہ \; \ldots\ldots}$$

جہاں $عہ + بہ + جہ + لہ + \ldots\ldots = ع$

**نتیجۂ صریح۔** $(\text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{2} + \text{د لا}^{3} + \cdots\cdots)^{\text{ع}}$

کی صورت تفصیلی میں وہ رقم جس میں $\text{ا}^{\text{عہ}}\ \text{ب}^{\text{بہ}}\ \text{ج}^{\text{جہ}}\ \text{د}^{\text{لہ}} \cdots\cdots$

شامل ہوتا ہے یہ ہے

$$\frac{|\text{ع}}{|\text{عہ}\ |\text{بہ}\ |\text{جہ}\ |\text{لہ} \cdots\cdots}\ \text{ا}^{\text{عہ}}\,(\text{ب لا})^{\text{بہ}}\,(\text{ج لا}^{2})^{\text{جہ}}\,(\text{د لا}^{3})^{\text{لہ}}$$

یا

$$\frac{|\text{ع}}{|\text{عہ}\ |\text{بہ}\ |\text{جہ}\ |\text{لہ} \cdots\cdots}\ \text{ا}^{\text{عہ}}\ \text{ب}^{\text{بہ}}\ \text{ج}^{\text{جہ}}\ \text{د}^{\text{لہ}} \cdots\cdots \text{لا}^{\text{بہ} + 2\text{جہ} + 3\text{لہ} + \cdots\cdots}$$

جہاں $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ} + \cdots\cdots = \text{ع}$

اس کو ہم صورت تفصیلی کی رقم عامہ کہینگے۔

**مثال۔** $(\text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{2})^{9}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{5}$ کا سر دریافت کرو۔

صورت تفصیلی کی رقم عامہ ہے۔

$$\frac{|9}{|\text{عہ}\ |\text{بہ}\ |\text{جہ}}\ \text{ا}^{\text{عہ}}\ \text{ب}^{\text{بہ}}\ \text{ج}^{\text{جہ}}\ \text{لا}^{\text{بہ} + 2\text{جہ}} \cdots\cdots\cdots (1)$$

جہاں $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = 9$

ہمیں قاعدہ آزمایش سے بہ اور جہ کی تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو شرائط مساوات $\text{بہ} + 2\,\text{جہ} = 5$ کو پورا کریں، اس کے بعد عہ کی قیمتیں مساوات $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = 9$ سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر جہ = ۲ تو بہ = ۱ اور عہ = ۶

اگر جہ = ۱ تو بہ = ۳ اور عہ = ۵

اگر جہ = ۰ تو بہ = ۵ اور عہ = ۴

سر مطلوب جملہ (۱) کی متناظر قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔

اس لیے سر مطلوب = ۹۱|/(۲| ۶|) اَ^۶ ب ج^۲ + ۹۱|/(۳| ۵|) اَ^۵ ب^۳ ج + ۹۱|/(۵| ۴|) اَ^۴ ب^۵

= ۲۵۲ اَ^۶ ب ج^۲ + ۵۰۴ اَ^۵ ب^۳ ج + ۱۲۶ اَ^۴ ب^۵

۲۰۰- (اَ + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ......)^ن کی صورتِ تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو جہاں ن کوئی مقدار ناطق ہے۔

مسئلۂ ثنائی کی مدد سے رقم عامہ ہے۔

ن (ن-۱) (ن-۲) .... (ن-ع+۱) / ع| اَ^(ن-ع) (ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ......)^ع

جہاں ع مثبت صحیح عدد ہے۔

نیز بموجب دفعہ گزشتہ (ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ........)^ع کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ ہے۔

ع| / (بہ| جہ| لہ|) ب^بہ ج^جہ د^لہ ........ لا^(بہ + ۲ جہ + ۳ لہ + ........)

جہاں بہ، جہ، لہ ........... ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن کا مجموعہ ع ہے۔

پس جملہ مجوزہ کی صورتِ تفصیلی میں رقم عامہ ہوئی۔

ن (ن-۱) (ن-۲) .... (ن-ع+۱) / (بہ| جہ| لہ|) اَ^(ن-ع) ب^بہ ج^جہ د^لہ ..... لا^(بہ+۲جہ+۳لہ+...)

جہاں بہ + جہ + لہ + ........ = ع

۲۰۱- چونکہ (اَ + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ..........)^ن صورت

اَ^ن (۱ + ب/اَ لا + ج/اَ لا^۲ + د/اَ لا^۳ + .......)^ن میں بھی لکھا جاسکتا ہے

اس لیے صرف اُسی صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جس میں جملہ کثیر الارقام کی پہلی رقم ایک ہو۔

پس (۱ + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + .......)^ن کی رقم عامہ ہے

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-ع+۱)}{|به\ |جه\ |له} ب^{به} ج^{جه} د^{له} \ldots\ldots لا^{به+۲جه+۳له+\ldots}$$

جہاں به + جه + له + ....... = ع

**مثال۔** $(۱-۳لا-۲لا^۲+۶لا^۳)^{\frac{۲}{۳}}$ کی صورتِ تفصیلی میں $لا^۳$ کا سر دریافت کرو۔

اس جملے کی رقم عامہ ہے۔

$$\frac{\frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}-۱)(\frac{۲}{۳}-۲)\ldots\ldots(\frac{۲}{۳}-ع+۱)}{|به\ |جه\ |له}(-۳)^{به}(-۲)^{جه}(۶)^{له} لا^{به+۲جه+۳له}$$

(۱).....................

ہمیں قاعدۂ آزمائش سے به، جه، له کی تمام مثبت صحیح قیمتیں دریافت کرنی ہیں جو شرائط مساوات به + ۲ جه + ۳ له = ۳ کو پورا کریں اس کے بعد ع مساوات ع = به + جه + له سے معلوم ہو سکتا ہے سر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔

به، جه، له کی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے بہتر ہوگا کہ له کی بڑی سے بڑی جائز مثبت صحیح قیمت سے شروع کر کے اس کو تمام صحیح مثبت قیمتیں یکے بعد دیگرے دی جائیں، صورتِ زیر بحث میں قیمتیں مفصلۂ ذیل ہیں :-

له = ۱، جه = ۰، به = ۰، ع = ۱

له = ۰، جه = ۱، به = ۱، ع = ۲

له = ۰، جه = ۰، به = ۳، ع = ۳

ان قیمتوں کو (۱) میں رکھنے سے سر مطلوب

$$= (\frac{۲}{۳})(۶) + (\frac{۲}{۳})(-\frac{۱}{۳})(-۳)(-۲) + \frac{\frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۳})(-\frac{۴}{۳})}{|۳}(-۳)^۳$$

$$= ۴ - \frac{۴}{۳} - \frac{۴}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

**۳۰۲ -** بعض اوقات مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کا پھیلاؤ زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

**مثال -** (۱ − ۲لا + ۳لا$^{۲}$)$^{-۳}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۴}$ کا سر دریافت کرو۔

اگر (۱ − $\overline{\text{۲لا − ۳لا}^{۲}}$)$^{-۳}$ کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے تو

سر مطلوب پھیلاؤ کی پہلی چند رقموں سے لا$^{۴}$ کا سر منتخب کرنے سے حاصل ہوگا، پہلی چند رقمیں یہ ہیں۔

۱ + ۳ (۲لا − ۳لا$^{۲}$) + ۶ (۲لا − ۳لا$^{۲}$)$^{۲}$ + ۱۰ (۲لا − ۳لا$^{۲}$)$^{۳}$ + ۱۵ (۲لا − ۳لا$^{۲}$)$^{۴}$

اس جملہ کو صرف پانچویں رقم تک پھیلانا کافی ہے کیونکہ اس کے بعد کی رقموں میں لا$^{۴}$ سے اعلیٰ قوتیں شامل ہیں۔

سر مطلوب = ۶ × ۹ + ۱۰ × ۳ (۲$^{۲}$) (−۳) + ۱۵ (۲)$^{۴}$

= −۶۶

# امثلہ نمبری ۱۵

سر دریافت کرو۔

۱- (ا − ب − ج + د)$^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی میں ا$^{۲}$ب$^{۳}$ج$^{۴}$د کا

۲- (ا + ب − ج − د)$^{۸}$ کی صورت تفصیلی میں ا$^{۲}$ب$^{۵}$د کا

۳- (۲ا + ب + ۳ج)$^{۷}$ کی صورت تفصیلی میں ا$^{۲}$ب$^{۳}$ج کا

۴- (الا − ب ما + ج ی)$^{۹}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۲}$ما$^{۳}$ی$^{۴}$ کا

۵- (۱ + ۳لا − ۲لا$^{۲}$)$^{۳}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۳}$ کا

۶- (۱ + ۲لا + لا$^{۲}$)$^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۴}$ کا

۷- (۱ + ۲لا − لا$^{۲}$)$^{۵}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۶}$ کا

۸- (۱ − ۲لا + ۳لا$^{۲}$ − ۴لا$^{۳}$)$^{۴}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۸}$ کا

۹- (۱ − ۲لا + ۳لا$^{۲}$ − لا$^{۴}$ − لا$^{۵}$)$^{۵}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۲۳}$ کا

۱۰- (۱ − ۲لا + ۳لا$^{۲}$)$^{-\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں لا$^{۵}$ کا

۱۱- $(۱ - ۲لا + ۳لا^{۲} - ۴لا^{۳})^{\frac{۱}{۲}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۳}$ کا

۱۲- $\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{۳} + \frac{لا^{۴}}{۹}\right)^{-۲}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۸}$ کا

۱۳- $(۲ - ۴لا + ۳لا^{۲})^{-۲}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۴}$ کا

۱۴- $(۱ + ۴لا^{۲} + ۱۰لا^{۴} + ۲۰لا^{۶})^{\frac{۳}{۴}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۶}$ کا

۱۵- $(۳ - ۱۵لا^{۳} + ۱۸لا^{۶})^{-۱}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^{۱۲}$ کا

۱۶- $(۱ - ۲لا - ۲لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ کو $لا^{۲}$ تک پھیلاؤ

۱۷- $(۱ + ۳لا^{۲} - ۶لا^{۳})^{-\frac{۲}{۳}}$ کو $لا^{۵}$ تک پھیلاؤ

۱۸- $(۸ - ۹لا^{۳} + ۱۸لا^{۴})^{\frac{۴}{۳}}$ کو $لا^{۸}$ تک پھیلاؤ

۱۹- اگر $(۱ + لا + لا^{۲} + \dots + لا^{ع})^{ن} = ل_{۰} + ل_{۱}لا + ل_{۲}لا^{۲} + ل_{۳}لا^{۳} + \dots + ل_{نع}لا^{نع}$

تو ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad ل_{۰} + ل_{۱} + ل_{۲} + \dots + ل_{نع} = (ع + ۱)^{ن}$$

$$(۲)\quad ل_{۱} + ۲ل_{۲} + ۳ل_{۳} + \dots + نع \times ل_{نع} = \frac{۱}{۲}نع(ع + ۱)^{ن}$$

۲۰- اگر $(۱ + لا + لا^{۲})^{ن}$ کی صورت تفصیلی میں ارقام کے سر بالترتیب $ل_{۰}، ل_{۱}، ل_{۲}، \dots$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ل_{۰}^{۲} - ل_{۱}^{۲} + ل_{۲}^{۲} - ل_{۳}^{۲} + \dots + (-۱)^{ن-۱}ل_{ن-۱}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}ل_{ن}\left\{۱ - (-۱)^{ن}ل_{ن}\right\}$$

۲۱- اگر $(۱ + لا + لا^{۲})^{ن}$ کی صورت تفصیلی ہو

$$ل_{۰} + ل_{۱}لا + ل_{۲}لا^{۲} + \dots + ل_{ر}لا^{ر} + \dots + ل_{۲ن}لا^{۲ن}$$

تو ثابت کرو کہ

$$ل_{۰} + ل_{۳} + ل_{۶} + \dots = ل_{۱} + ل_{۴} + ل_{۷} + \dots = ل_{۲} + ل_{۵} + ل_{۸} + \dots = ۳^{ن-۱}$$

# باب شانزدہم

## لوکارتم

**۲۰۳- تعریف** - ایک دیے ہوئے اساس پر کسی دیے ہوئے عدد کا لوکارتم اساس کی اس قوت کا قوت نما ہے جو دیے ہوئے عدد کے مساوی ہے، پس اگر ن اور ا دو دیے ہوئے عدد ہوں اور ایک عدد لا ایسا معلوم کیا جائے کہ $ا^{لا}$ = ن تو لا لوکارتم ہے ن کا اساس ا پر۔

**مثال**- (۱) چونکہ $۳^{۴}$ = ۸۱، اس لیے ۸۱ کا لوکارتم اساس ۳ پر ۴ ہے

(۲) چونکہ $۱۰^{۱}$ = ۱۰، $۱۰^{۲}$ = ۱۰۰، $۱۰^{۳}$ = ۱۰۰۰، ........

اس لیے اساس ۱۰ پر ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ........ کے لوکارتم بالترتیب طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ........ ہیں۔

۲۰۴- ن کا لوکارتم اساس ا پر بالعموم اس طرح لکھا جاتا ہے $لوک_{ا}$ ن، پس دونوں مساواتیں $ا^{لا}$ = ن، اور لا = $لوک_{ا}$ ن ایک ہی ربط کو ظاہر کرتی ہیں ان مساواتوں سے مساوات متماثلہ ن = $ا^{لوک_{ا} ن}$ حاصل ہوتی ہے اور یہ بعض اوقات کام آتی ہے۔

**مثال**- $۳۲\sqrt[۵]{۴}$ کا لوکارتم اساس $۲\sqrt{۲}$ پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مطلوبہ لوکارتم ہے، تب

بموجب تعریف $(۲\sqrt{۲})^{\text{لا}} = ۳۲ \times \sqrt[۵]{۴}$

$\therefore \quad (۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}})^{\text{لا}} = ۲^{۵} \times ۲^{\frac{۲}{۵}}$

$\therefore \quad ۲^{\frac{۳}{۲}\text{لا}} = ۲^{۵ + \frac{۲}{۵}}$

اس لیے قوت نماؤں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{۳}{۲}\text{لا} = \frac{۲۷}{۵} \quad \therefore \text{لا} = \frac{۱۸}{۵} = ۳٫۶$$

**۲۰۵۔** جب یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص نظام لوکارتمی استعمال میں ہے تو حرف آخرہ کو جس سے اساس تعبیر ہوتا ہے حذف کر دیتے ہیں۔ پس عملی حسابات میں جہاں اساس ہمیشہ دس ہوتا ہے اکثر $\text{لوک}_{۱۰}\,۲$، $\text{لوک}_{۱۰}\,۳$، ........... کی بجائے اختصاراً لوک ۲، لوک ۳، ........... لکھتے ہیں۔

لوکارتم کا اساس کوئی عدد ہو سکتا ہے اور کسی دیے ہوئے اساس کے جواب میں تمام اعداد کے لوکارتم معلوم ہو سکتے ہیں۔ پیشتر اس کے کہ ہم مروج لوکارتمی جدولوں پر بحث کریں ہم چند ایسے مسائل عامہ ثابت کریں گے جو تمام لوکارتموں کے لیے درست ہیں خواہ اساس کچھ ہی ہو۔

**۲۰۶۔** ایک کا لوکارتم صفر ہے

ا کی تمام قیمتوں کے لیے $\text{ا}^{۰} = ۱$

لوک ۱ = ۰ خواہ اساس کچھ ہی ہو

**۲۰۷۔** اساس کا اپنا لوکارتم ایک ہے

چونکہ $\text{ا}^{۱} = \text{ا}$ اس لیے $\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ا} = ۱$

اساس کی کسی قوت (مثلاً $\text{ا}^{\text{ع}}$) کا لوکارتم ع ہے اور اساس کے

متکافی کا لوکارتم - ا ہے۔

۲۰۸ - دیے ہوئے عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم دریافت کرو۔
فرض کرو کہ م ن حاصل ضرب ہے اور ا اساس ہے اور فرض کرو کہ

لا = لوک$_{\text{ا}}$ م، ما = لوک$_{\text{ا}}$ ن

پس　　ا$^{\text{لا}}$ = م اور ا$^{\text{ما}}$ = ن

پس حاصل ضرب م ن = ا$^{\text{لا}}$ × ا$^{\text{ما}}$ = ا$^{\text{لا+ما}}$

جس سے، بموجب تعریف، لوک$_{\text{ا}}$ م ن = لا + ما = لوک$_{\text{ا}}$ م + لوک$_{\text{ا}}$ ن اسی طرح سے لوک$_{\text{ا}}$ م ن ف = لوک$_{\text{ا}}$ م + لوک$_{\text{ا}}$ ن + لوک$_{\text{ا}}$ ف
اور علیٰ ہذا القیاس، اجزائے ضربی کی کسی تعداد کے لیے

مثال -　لوک ۴۲ = لوک (۲ × ۳ × ۷)
= لوک ۲ + لوک ۳ + لوک ۷

۲۰۹ - ایک کسر کا لوکارتم دریافت کرو

اگر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ایک دی ہوئی کسر ہو، تو فرض کرو کہ

لا = لوک$_{\text{ا}}$ م اور ما = لوک$_{\text{ا}}$ ن

پس ا$^{\text{لا}}$ = م اور ا$^{\text{ما}}$ = ن

اور کسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{ا}^{\text{ما}}}$ = ا$^{\text{لا-ما}}$

جس سے، بموجب تعریف، لوک$_{\text{ا}}$ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ = لا - ما = لوک$_{\text{ا}}$ م - لوک$_{\text{ا}}$ ن

مثال -　لوک (۴ $\frac{۲}{۷}$) = لوک $\frac{۳۰}{۷}$

= لوک ۳۰ - لوک ۷

= لوک (۲ × ۳ × ۵) - لوک ۷

$= \text{لوک } ۲ + \text{لوک } ۳ + \text{لوک } ۵ - \text{لوک } ۷$

**۲۱۰** - ایک عدد کی کسی منطق قوت کا لوکارتم معلوم کرو۔

اگر $\text{لوک}_{ا} \left(م^{ت}\right)$ مطلوب ہو تو فرض کرو کہ۔

$$لا = \text{لوک}_{ا}\, م \quad \text{پس} \quad ا^{لا} = م$$

$$\text{تب} \quad م^{ت} = \left(ا^{لا}\right)^{ت} = ا^{ت\, لا}$$

جس سے، بموجب تعریف، $\text{لوک}_{ا} \left(م^{ت}\right) = ت\, لا$

$$\text{یعنی} \quad \text{لوک}_{ا} \left(م^{ت}\right) = ت\, \text{لوک}_{ا}\, م$$

$$\text{اسی طرح سے} \quad \text{لوک}_{ا} \left(م^{\frac{۱}{ر}}\right) = \frac{۱}{ر}\, \text{لوک}_{ا}\, م$$

**مثال ۱** - $\text{لوک } \frac{۵۴۰}{۵۳۹} = \text{لوک } \frac{۲^{۲} \times ۳^{۳} \times ۵}{۱۱ \times ۷^{۲}}$

$= ۲\, \text{لوک } ۲ + ۳\, \text{لوک } ۳ + \text{لوک } ۵ - ۲\, \text{لوک } ۷ - \text{لوک } ۱۱$

**مثال ۲** - $\text{لوک } \frac{\sqrt[۳]{۴۹}}{\sqrt{۲۱}} = \text{لوک } \frac{۷^{\frac{۲}{۳}}}{۷^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{\frac{۱}{۲}}}$

$= \frac{۲}{۳}\, \text{لوک } ۷ - \frac{۱}{۲}\, \text{لوک } ۳ - \frac{۱}{۲}\, \text{لوک } ۷$

$= \frac{۱۱}{۲۱}\, \text{لوک } ۷ - \frac{۱}{۲}\, \text{لوک } ۳$

**۲۱۱** - نتائج مندرجۂ بالا سے ظاہر ہے کہ

(۱) کسی حاصل ضرب کا لوکارتم اُس کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(۲) کسی کسر کا لوکارتم اُس حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے جو شمار کنندہ کے لوکارتم میں سے نسب نما کے لوکارتم کو منفی کرنے سے حاصل ہو۔

(۳) کسی عدد کی ت ویں قوت کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم کا ت گنا ہوتا ہے۔

(۴) کسی عدد کے ر ویں جذر کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم کے $\frac{1}{ر}$ ویں حصے کے برابر ہوتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ لوکارتموں کے استعمال سے اعمال ضرب تقسیم، بالترتیب اعمال جمع، تفریق میں اور صعود، نزول بالترتیب اعمال ضرب، تقسیم میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

**مثال ۱۔** لوک $\frac{۳ \times \sqrt{۳۲}}{۴۰ \times \sqrt[۳]{۱۸}}$ کو لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۵ کی رقوم میں بیان کرو۔

دیا ہوا جملہ = لوک $(۳ \times ۳۲^{\frac{1}{2}})$ ۔ لوک $(۴۰ \times ۱۸^{\frac{1}{3}})$

= لوک ۳ + لوک $(۳۲)^{\frac{1}{2}}$ ۔ {لوک ۴۰ + لوک $(۱۸)^{\frac{1}{3}}$}

= لوک ۳ + $\frac{1}{2}$ لوک ۳۲ ۔ لوک ۴۰ ۔ $\frac{1}{3}$ لوک ۱۸

= لوک ۳ + $\frac{1}{2}$ لوک $(۲^{۵})$ ۔ لوک $(۵ \times ۲^{۳})$ ۔ $\frac{1}{3}$ لوک $(۲ \times ۳^{۲})$

= لوک ۳ + $\frac{5}{2}$ لوک ۲ ۔ (لوک ۵ + ۳ لوک ۲) ۔ $\frac{1}{3}$ (لوک ۲ + ۲ لوک ۳)

= $(1 - \frac{2}{3})$ لوک ۳ + $(\frac{5}{2} - 3 - \frac{1}{3})$ لوک ۲ ۔ لوک ۵

= $\frac{1}{3}$ لوک ۳ ۔ $\frac{5}{6}$ لوک ۲ ۔ لوک ۵

**مثال ۲۔** لوک $\frac{\sqrt[۳]{ا}}{ج^{۵} ب^{۲}}$ کو لوک ا، لوک ب، لوک ج کی رقموں میں بیان کرو

لوک $\frac{\sqrt[۳]{ا}}{ج^{۵} ب^{۲}}$ = لوک $\frac{ا^{\frac{1}{3}}}{ج^{۵} ب^{۲}}$

= لوک ا^۳/۲ ـ لوک (ج^۵ ب^۲)

= ۳/۲ لوک ا ـ (لوک ج^۵ + لوک ب^۲)

= ۳/۲ لوک ا ـ ۵ لوک ج ـ ۲ لوک ب

**مثال ۳ ـ** مساوات ا^لا × ج^-۲لا = ب^۳لا+۱ سے لا کی قیمت دریافت کرو۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوگا۔

لا لوک ا ـ ۲ لا لوک ج = (۳ لا + ۱) لوک ب

∴ لا (لوک ا ـ ۲ لوک ج ـ ۳ لوک ب) = لوک ب

∴ لا = لوک ب / (لوک ا ـ ۲ لوک ج ـ ۳ لوک ب)

# امثلہ نمبری ۱۶ ا

لوکارتم دریافت کرو۔

۱ـ ۱۶ کا اساس ۲√۲ پر اور ۲۸۰۷ کا اساس ۲ ۳√۳ پر

۲ـ ۱۲۵ کا ،، ۵√۵ ،، ۲۵ء کا ،، ۴ ،،

۳ـ ۱/۲۵۶ کا ،، ۲√۲ ،، ۳۰ء کا ،، ۹ ،،

۴ـ ۰۶۲۵ء کا ،، ۲ ،، ۰۰۰ا کا ،، ۰۱ء ،،

۵ـ ۰۰۰۱ء کا ،، ۰۰۱ء ،، ۱ء کا ،، ۹√۳

۶ـ ا^(۵/۶)√ ، ۱/(ا^(۱/۲)) ، کا ا^(-۱۵/۲)√ ،، ا ،،

۷ـ ذیل کے لوکارتموں کی قیمتیں دریافت کرو۔

لوک$_{8}$ ۱۲۸، لوک$_{6}$ $\frac{1}{216}$، لوک$_{27}$ $\frac{1}{81}$، لوک$_{343}$ ۴۹

ذیل کے سات لوکارتموں کو لوک ا، لوک ب، لوک ج، کی رقوم میں بیان کرو۔

۸۔ لوک $\left(\sqrt[6]{\text{ا}^{2}\,\text{ب}^{3}}\right)$ ۹۔ لوک $\left(\sqrt[3]{\text{ا}^{2}} \times \sqrt[2]{\text{ب}^{3}}\right)$

۱۰۔ لوک $\left(\sqrt[9]{\text{ا}^{-4}\,\text{ب}^{3}}\right)$ ۱۱۔ لوک $\left(\sqrt[2]{\text{ا}^{-2}\,\text{ب}} \times \sqrt[3]{\text{ا}\,\text{ب}^{-3}}\right)$

۱۲۔ لوک $\left(\sqrt[3]{\text{ا}^{-1}\sqrt{\text{ب}^{3}}} \div \sqrt{\text{ب}^{3}\sqrt{\text{ا}}}\right)$

۱۳۔ لوک $\dfrac{\sqrt[3]{\text{ا}\,\text{ب}^{-1}\,\text{ج}^{-2}}}{\left(\text{ا}^{-1}\,\text{ب}^{-2}\,\text{ج}^{-4}\right)^{\frac{1}{6}}}$

۱۴۔ لوک $\left\{\left(\dfrac{\text{ب}\,\text{ج}^{-2}}{\text{ب}^{-4}\,\text{ج}^{3}}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{\text{ب}^{-1}\,\text{ج}}{\text{ب}^{2}\,\text{ج}^{-3}}\right)^{5}\right\}$

۱۵۔ ثابت کرو کہ لوک $\dfrac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18 \times \sqrt{2}}}$

$= \frac{1}{4}$ لوک ۵ $- \frac{2}{5}$ لوک ۲ $- \frac{2}{3}$ لوک ۳

۱۶۔ لوک $\sqrt[3]{729 \times 9^{-1} \times 27^{-\frac{4}{3}}}$ کو مختصر کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ لوک $\frac{75}{16}$ ـ ۲ لوک $\frac{5}{9}$ + لوک $\frac{32}{243}$ = لوک ۲

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۸۔ $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{ج}\,\text{ب}^{\text{لا}}$ ۱۹۔ $\text{ا}^{2\text{لا}} \times \text{ب}^{3\text{لا}} = \text{ج}^{5}$

۲۰۔ $\frac{ا^{لا+۱}}{ب^{لا-۱}} = ج^{۲لا}$ ۲۱۔ $\left\{\begin{array}{l} ا^{۲لا} \times ب^{۳ما} = م^{۵} \\ ا^{۳لا} \times ب^{۲ما} = ن^{۱} \end{array}\right.$

۲۲۔ اگر لوک $(لا^{۲}\, ما^{۳}) = ا$ اور لوک $(\frac{لا}{ما}) = ب$ تو لوک لا اور لوک ما کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۳۔ اگر $ا^{۳-لا} \times ب^{۵لا} = ا^{لا+۵} \times ب^{۳لا}$ تو ثابت کرو کہ

$$لا\ لوک\ (\frac{ب}{ا}) = لوک\ ا$$

۲۴۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$(ا^{۴} - ۲ا^{۲}ب^{۲} + ب^{۴})^{لا-۱} = (ا - ب)^{۲لا}(ا + ب)^{-۲}$$

# مروّج لوکارتم

۲۱۲۔ اساس ۱۰ پر جو لوکارتم لیے گئے ہوں ان کو مروّج لوکارتم کہتے ہیں۔ اس نظام کو ۱۶۱۵ء میں برگس نے رائج کیا جو نیپیئر، موجد لوکارتم، کا ہم عصر تھا۔

مساوات $۱۰^{لا} = ن$ سے ظاہر ہے کہ مروج لوکارتم بالعموم صحیح عدد نہیں ہوتے اور نہ وہ ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں مثلاً

$۳۱۵۴ > ۱۰^{۳}$ اور $< ۱۰^{۴}$

∴ لوک ۳۱۵۴ = ۳ + ایک کسر

نیز $۰۶ء > ۱۰^{-۲}$ اور $< ۱۰^{-۱}$

اس لیے لوک ۰۶ء = ۲- + ایک مثبت کسر

۲۱۳۔ **تعریف** کسی لوکارتم کے صحیح حصہ کو ممیّز اور حصۂ اعشاریہ کو اعشاریۂ لوکارتمی کہتے ہیں۔

## مثال ۔ لوک ۲۰ = ۱٫۳۰۱۰۳

اس میں لوک ۲۰ کا ممیز ایک ہے اور اس کا اعشاریہ لوکارثمی ۳۰۱۰۳ء ہے ۔کسی عدد کے لوکارثم کا ممیز اساس ۱۰ پر صرف دیکھنے سے ہی لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ دفعات ذیل سے ظاہر ہوگا۔

## ۲۱۴ ۔ کوئی عدد ایک سے بڑا ہے اس کے لوکارثم کا ممیز دریافت کرو۔

چونکہ $۱۰^{۰} = ۱$

$۱۰^{۱} = ۱۰$

$۱۰^{۲} = ۱۰۰$

$۱۰^{۳} = ۱۰۰۰$

...........................................

یہ حاصل ہوتا ہے کہ جس عدد کے صحیح حصہ میں صرف ایک ہندسہ ہو وہ $۱۰^{۰}$ اور $۱۰^{۱}$ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں دو ہندسے ہوں وہ $۱۰^{۱}$ اور $۱۰^{۲}$ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں تین ہندسے ہوں وہ $۱۰^{۲}$ اور $۱۰^{۳}$ کے درمیان واقع ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لیے معلوم ہوا کہ ایسا عدد جس کے صحیح حصے میں ن ہندسے ہوں وہ $۱۰^{ن-۱}$ اور $۱۰^{ن}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

اگر م ایسا عدد ہو جس کے صحیح حصے میں ن ہندسے ہوں تو

$$م = ۱۰^{(ن - ۱) + \text{ایک مثبت کسر واجب}}$$

$$\therefore \text{لوک} م = (ن - ۱) + \text{ایک مثبت کسر واجب}$$

لوکارثم کا ممیز (ن - ۱) ہے پس معلوم ہوا کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو تو اس کے لوکارثم کا ممیز مثبت ہوگا اور اُن ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصے میں ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا۔

## مثال ۔ $۱۰^{۲} < ۱۲۵$ اور $< ۱۰^{۳}$

∴ لوک ۱۲۵ = ۲ + اعشاریہ لوکارتمی

اس لیے لوک ۱۲۵ کا ممیز ۲ ہے

۲۳۵۴ > $۱۰^{۳}$ اور < $۱۰^{۴}$

اس لیے لوک ۲۳۵۴ کا ممیز ۳ ہے

۶۷٫۰۴ > $۱۰^{۱}$ اور < $۱۰^{۲}$

اس لیے لوک ۶۷٫۰۴ کا ممیز ایک ہے

۲۱۵ - کسی کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز دریافت کرو۔

چونکہ $۱۰^{۰}$ = ۱

$۱۰^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}$ = ٫۱

$۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰}$ = ٫۰۱

$۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰۰۰}$ = ٫۰۰۱

..........................

اس سے ظاہر ہے کہ جس کسر اعشاریہ میں علامت اشاریہ کے بعد ایک صفر ہو (مثلاً ٫۰۲۳۴ جو ٫۰۱ سے بڑی ہے اور ٫۱ سے چھوٹی ہے) وہ $۱۰^{-۲}$ اور $۱۰^{-۱}$ کے درمیان واقع ہوگی اور وہ کسر جس میں علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہوں وہ $۱۰^{-۳}$ اور $۱۰^{-۲}$ کے درمیان واقع ہوگی اور علیٰ ہذا القیاس، اس سے معلوم ہوا کہ ایسی کسر اعشاریہ جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد ن صفر ہوں وہ $۱۰^{-(ن+۱)}$ اور $۱۰^{-ن}$ کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ ع کوئی کسر اعشاریہ ہے جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد ن صفر ہیں۔

تو ع = $۱۰^{-(ن+۱)}$ + ایک مثبت کسر واجب

∴ لوک ع = -(ن+۱) + ایک مثبت کسر واجب

اس لیے ممیز مطلوب ۔ (ن + ۱) ہے یعنی معلوم ہوا کہ ہر ایک کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے عین بعد جتنے صفر ہوں اُن کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے

مثال ۔ ء۳ = ۳/۱۰ جو > ۱/۱۰ اور < ۱

یعنی ء۳ > $۱۰^{-۱}$ اور < $۱۰^{۰}$

اس لیے لوک ء۳ = -۱ + ایک مثبت کسر اعشاریہ

اس لیے لوک ء۳ کا ممیز -۱ ہے

ء۰۳۵ > ء۰۱ اور < ء۱

یعنی ء۰۳۵ > $۱۰^{-۲}$ اور < $۱۰^{-۱}$

اس لیے لوک ء۰۳۵ = -۲ + ایک مثبت کسر اعشاریہ

اس لیے لوک ء۰۳۵ کا ممیز -۲ ہے

ء۰۰۰۰۳۷۸۱ > ء۰۰۰۰۱ اور < ء۰۰۰۱

یعنی ء۰۰۰۰۳۷۸۱ > $۱۰^{-۵}$ اور < $۱۰^{-۴}$

اس لیے لوک ء۰۰۰۰۳۷۸۱ کا ممیز -۵ ہے۔

۲۱۶ ۔ ایک سے لیکر ۲۰۰۰۰ تک تمام صحیح اعداد کے لوکارتم اساس ۱۰ پر نکالے گئے ہیں اور ان کو جدولوں کی شکل میں لکھا گیا ہے، اکثر لوکارتمی جدولوں میں لوکارتم اعشاریہ کے ساتھ مقام تک مندرج ہوتے ہیں عملی کام میں اساس ۱۰ پر نکالے ہوئے لوکارتم زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں اس نظام کے دو بڑے فوائد یہ ہیں:۔

(۱) اُن نتائج سے جو ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں ظاہر ہے کہ ممیز صرف دیکھنے ہی سے لکھے جا سکتے ہیں اس لیے جدولوں میں صرف اعشاریہ لوکارتمی مندرج کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۲) جن عددوں کے ملحوظ ہندسے بلحاظ ترتیب کے ایک ہی ہوں اُن میں سے ہر ایک کا اعشاریہ لوکارتمی وہی ہوتا ہے۔ پس اس نظام میں صرف صحیح اعداد کے اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں میں مندرج کرنا کافی ہوتا ہے۔ اگلی دفعہ میں اس کا ثبوت دینگے۔

نوٹ۔ کسی عدد کے ملحوظ ہندسے وہ ہوتے ہیں جو اول اور آخر سے تمام صفر دور کرنے پر باقی رہ جائیں مثلاً ۰۰۳۲۰۱۶ء اور ۳۲۰۱۶۰۰۰ کے ملحوظ ہندسے ۳۲۰۱۶ ہیں۔

۲۱۷۔ فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے۔ اگر اسے دس کی کسی قوت سے ضرب دی جائے یا اس کو دس کی کسی قوت پر تقسیم کیا جائے تو صرف مقام اعشاریہ میں فرق آتا ہے مگر ہندسوں کی ترتیب نہیں بدلتی۔ اس سے ظاہر ہے کہ $ن \times ۱۰^{ف}$ اور $ن \div ۱۰^{ق}$ (جہاں ف اور ق دونوں صحیح ہیں) ایسے اعداد ہیں جن کے ملحوظ ہندسے وہی ہیں جو ن کے ہیں۔

اب لوک $(ن \times ۱۰^{ف})$ = لوک ن + ف لوک ۱۰

= لوک ن + ف .........(۱)

نیز لوک $(ن \div ۱۰^{ق})$ = لوک ن − ق لوک ۱۰

= لوک ن − ق .........(۲)

ظاہر ہے کہ ربط (۱) میں لوک ن پر صرف ایک صحیح عدد کا اضافہ ہو گیا ہے اور (۲) میں ایک صحیح عدد لوک ن میں سے تفریق کیا گیا ہے یعنی ثابت ہوا کہ ہر صورت میں اعشاریہ لوکارتمی وہی رہتا ہے۔ اس دفعہ میں اور تین گزشتہ دفعات میں اعشاریہ لوکارتمی مثبت فرض کیا گیا ہے۔ نظام برگس[1] سے پورا فائدہ اٹھانے کے لیے ہم اپنے حسابی اعمال میں اس بات کا خیال رکھتے ہیں کہ اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت رہے تاکہ

[1] Briggs

جب ہم اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں سے لیں تو فقط ممیز کو مع اس کی مناسب علامت کے اس کے ماقبل لکھ دیں۔

۲۱۸- منفی لوکارتم کی صورت میں منفی علامت کو ممیز کے اوپر لکھتے ہیں اور اس کے پہلے نہیں لکھتے تاکہ یہ معلوم ہو کہ صرف ممیز ہی منفی ہے اور پورا جملہ منفی نہیں ہے۔ پس ۳۰۱۰۳ء۴̄ جو ۰۰۰۲ء۰ کا لوکارتم ہے = -۴ + ۳۰۱۰۳ء۰ اسکو -۴ء۳۰۱۰۳ سے مختلف خیال کرنا چاہیے جو ایک ایسا جملہ ہے جس میں حصص صحیح اور اعشاریہ دونوں منفی ہیں۔ اعشاریہ لوکارتمی کو مثبت بنانے کے لیے بعض اوقات ذیل کی حسابی ترکیب مفید ثابت ہوتی ہے مثلاً فرض کرو کہ کسی سوال کے حل میں مقدار ۰۰۶۹۸۹۷ء۳- واقع ہوتی ہے جس میں پورا جملہ منفی ہے، اگر ہم ممیز سے ایک منفی کریں اور اعشاریہ لوکارتمی میں ایک جمع کریں تو دی ہوئی مقدار معیاری صورت میں تحویل ہوتی ہے۔

یعنی -۳ء۶۹۸۹۷ = -۴ + (۱ - ۶۹۸۹۷ء)

= ۳۰۱۰۳ء۴̄

اس قسم کی اور کئی صورتیں آگے دیکھنے میں آئیں گی۔

مثال ۱- ۰۰۰۲۴۳۲ء کا لوکارتم دریافت کرو۔

جدولوں سے ہمیں معلوم ہوگا کہ لوک ۲۴۳۲ کا اعشاریہ لوکارتمی ۳۸۵۹۶۳۶ ہے۔ [جدولوں میں علامت اعشاریہ اور ممیز نہیں دیے جاتے] نیز بموجب دفعہ ۲۱۵ دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کا ممیز -۴ ہے۔

∴ لوک ۰۰۰۲۴۳۲ء = ۳۸۵۹۶۳۶ء۴̄

مثال ۲- $\sqrt[5]{\text{۰۰۰۰۱۶۵ء}}$ کی قیمت دریافت کرو۔ دیا گیا ہے کہ لوک ۱۶۵ = ۲ء۲۱۷۴۸۳۹ اور لوک ۴۴۷۹۲ = ۵ء۸۴۳۴۹۶۸

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوبہ ہے، تب

لوک لا = لوک $(\text{٠٫٠٠٠٠٠١٦٥})^{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{٥}$ لوک (٠٫٠٠٠٠٠١٦٥)

$= \frac{١}{٥} (\bar{٦}\text{٫٢١٧٤٨٣٩})$ کیونکہ لوک ٠٫٠٠٠٠٠١٦٥ کا اعشاریہ لوکارتمی وہی ہے جو لوک ١٦٥ کا ہے اور بموجب دفعہ ٢١٥ ممیز $-٦$ ہے۔

اب $\frac{١}{٥} (\bar{٦}\text{٫٢١٧٤٨٣٩}) = \frac{١}{٥} (\bar{١٠} + \text{٤٫٢١٧٤٨٣٩})$

$= \bar{٢}\text{٫٨٤٣٤٩٦٨}$

اور لوک ٦٩٧٤٢٤ کا اعشاریہ لوکارتمی ٫٨٤٣٤٩٦٨ ہے اس لیے معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسے تو یہی ہیں مگر علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہے پس لا = ٠٫٠٦٩٧٤٢٤

٢١٩۔ لوکارتم نکالنے کا طریقہ اگلے باب میں بیان ہوگا اور وہاں معلوم ہوگا کہ پہلے لوکارتم کسی اور اساس کے موافق دریافت کیے جاتے ہیں اور بعد میں ان کی تحویل (اساس ١٠ پر) مروج لوکارتموں میں کی جاتی ہے۔

اس لیے ضروری ہے کہ ہم کسی ایک نظام لوکارتمی کو جس کا اساس معلوم ہو کسی نئے نظام لوکارتمی میں جس کا اساس مختلف ہو تبدیل کرنے کا طریقہ دریافت کریں۔

٢٢٠۔ فرض کرو کہ کل اعداد کے لوکارتم اساس ڈ پر معلوم ہیں اور جدولوں میں مندرج ہیں اور اساس ب پر لوکارتم نکالنا ہے۔

فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے جس کا لوکارتم اساس ب پر نکالنا مطلوب ہے، فرض کرو کہ ما = لوک$_{\text{ب}}$ ن یعنی ب$^{\text{ما}}$ = ن

∴ لوک$_{\text{ڈ}}$ (ب$^{\text{ما}}$) = لوک$_{\text{ڈ}}$ ن

یعنی ما × لوک$_{\text{ڈ}}$ ب = لوک$_{\text{ڈ}}$ ن

∴ ما = $\frac{١}{\text{لوک}_{\text{ڈ}}\,\text{ب}}$ × لوک$_{\text{ڈ}}$ ن

یا $لوک_{پ} ن = \frac{1}{لوک_{ا} ب} \times لوک_{ا} ن$ ............(۱)

اب چونکہ ن اور ب معلوم ہیں اس لیے $لوک_{ا} ن$ اور $لوک_{ا} ب$ جدولوں سے معلوم ہو سکتے ہیں اور اس طرح $لوک_{پ} ن$ معلوم ہو سکتا ہے۔

پس ظاہر ہے کہ لوکارتموں کو اساس ا سے اساس ب میں تبدیل کرنے کے لیے صرف اتنا ضروری ہے کہ ہم انھیں $\frac{1}{لوک_{ا} ب}$ سے ضرب دیں، یہ ایک مستقل مقدار ہے جو جدولوں سے معلوم ہو سکتی ہے، $\frac{1}{لوک_{ا} ب}$ کو لوکارتموں کا مقیاس کہتے ہیں۔

**۲۲۱۔** دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ن کی جگہ ا لکھنے سے

$$لوک_{ب} ا = \frac{1}{لوک_{ا} ب} \times لوک_{ا} ا = \frac{1}{لوک_{ا} ب}$$

$$\therefore \quad لوک_{ب} ا \times لوک_{ا} ب = 1$$

اس نتیجہ کو بالراست ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $لا = لوک_{ا} ب$ یعنی $ا^{لا} = ب$

اساس ب پر لوکارتم لینے سے

$$لا \; لوک_{ب} ا = لوک_{ب} ب = 1$$

$$\therefore \quad لوک_{ا} ب \times لوک_{ب} ا = 1$$

**مثال ۱۔** $لوک_{ب} ا \times لوک_{ج} ب \times لوک_{ا} ج$ کو مختصر کرو۔

$\text{لوک}_{\text{ب}}\ \text{ا} = \dfrac{۱}{\text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ب}} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ا}$ اگر نیا اساس ج لیا جائے۔

اب $\text{لوک}_{\text{ب}}\ \text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ب} = \dfrac{۱}{\text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ب}} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ب}$

$= \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ا}$

$\therefore\ \text{لوک}_{\text{ب}}\ \text{ا} \times \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ب} \times \text{لوک}_{\text{د}}\ \text{ج}$

$= \text{لوک}_{\text{ج}}\ \text{ا} \times \text{لوک}_{\text{د}}\ \text{ج} = \text{لوک}_{\text{د}}\ \text{ا}$

**مثال ۲۔** $\text{لوک}_{۱۰}\ ۶۴ \times \text{لوک}_{۵}\ ۱۰ \div \text{لوک}_{۵}\ ۸$ کو مختصر کرو۔

$\text{جملہ} = \text{لوک}_{۱۰}\ ۶۴ \times \dfrac{\text{لوک}_{۵}\ ۱۰}{\text{لوک}_{۵}\ ۸} = \text{لوک}_{۱۰}\ ۶۴ \times \text{لوک}_{۸}\ ۱۰$

$= \text{لوک}_{۸}\ ۶۴ = \text{لوک}_{۸}\ ۸^{۲} = ۲$

۲۲۲۔ اس جگہ ہم چند متفرق مثالیں دیں گے جن کی مدد سے یہ واضح ہوگا کہ لوکارتھم بالعموم اعمال حسابیہ کو بہت آسان بنا دیتے ہیں لیکن لوکارتھمی جدولوں کے استعمال کی تشریح کے لیے طالب علم کو چاہیے کہ علم مثلث حصۂ اول کا مطالعہ کرے۔

**مثال ۱۔** معلوم ہے کہ لوک ۳ = ء۴۷۷۱۲۱۳

معلوم کرو لوک $\left\{ (۲ء۷)^{۳} \times (۱ء۸۱)^{\frac{۴}{۵}} \div (۹۰)^{\frac{۵}{۴}} \right\}$

$\text{قیمت مطلوبہ} = ۳\ \text{لوک}\ \dfrac{۲۷}{۱۰} + \dfrac{۴}{۵}\ \text{لوک}\ \dfrac{۱۸۱}{۱۰۰} - \dfrac{۵}{۴}\ \text{لوک}\ ۹۰$

$= ۳(\text{لوک}\ ۳^{۳} - ۱) + \dfrac{۴}{۵}(\text{لوک}\ ۳^{۴} - ۲) - \dfrac{۵}{۴}(\text{لوک}\ ۳^{۲} + ۱)$

$= (۹ + \dfrac{۱۶}{۵} - \dfrac{۵}{۲})\ \text{لوک}\ ۳ - (۳ + \dfrac{۸}{۵} + \dfrac{۵}{۴})$

= ۹۷/۱۰ لوک ۳ - ۱۷/۲۰ ۵

= ۴٫۶۲۸۰۷۶۶ - ۵٫۸۵ = ۳̄٫۷۷۸۰۷۶۶

طالب علم یہ غور سے دیکھے کہ ۵ یا ۵ کی کسی قوت کا لوکارتم ہمیشہ لوک ۲ سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

لوک ۵ = لوک ۱۰/۲ = لوک ۱۰ - لوک ۲ = ۱ - لوک ۲

مثال ۲ - $(۸۷۵)^{۱۶}$ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰ اور لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰

لوک $(۸۷۵)^{۱۶}$ = ۱۶ لوک (۷ × ۱۲۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + لوک ۱۲۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + ۳ لوک ۵)

= ۱۶ (لوک ۷ + ۳ - ۳ لوک ۲)

= ۱۶ × ۲٫۹۴۲۰۰۸۰

= ۴۷٫۰۷۲۱۲۸

اس لیے ہندسوں کی تعداد ۴۸ ہے [دفعہ ۲۱۴]

مثال ۳ - لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

مساوات $۶^{۳ - ۴ لا} × ۴^{لا + ۵} = ۸$ سے لا کی قیمت اعشاریہ کے دو مقام تک دریافت کرو۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوتا ہے

(۳ - ۴ لا) لوک ۶ + (لا + ۵) لوک ۴ = لوک ۸

∴ (۳ - ۴ لا) (لوک ۲ + لوک ۳) + (لا + ۵) ۲ لوک ۲ = ۳ لوک ۲

∴ لا (- ۴ لوک ۲ - ۴ لوک ۳ + ۲ لوک ۲) = ۳ لوک ۲ - ۳ لوک ۲

- ۳ لوک ۳ - ۱۰ لوک ۲

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{۱۰ لوک ۲ + ۳ لوک ۳}}{\text{۲ لوک ۲ + ۴ لوک ۳}}$$

$$= \frac{\text{۴٫۴۱۴۶۶۳۹}}{\text{۲٫۵۱۰۵۴۵۲}} = \text{.................. ۱٫۷۷}$$

# امثلہ نمبری ۱۶ ب

۱- مفصلۂ ذیل لوکارتموں کے ممیز صرف دیکھنے سے ہی دریافت کرو۔
۲۱۷۳۵، ۳۲۳٫۸، ۳۵٫۰، ۰٫۰۳۵، ۲٫، ۷۸٫، ۸۷۵٫

۲- لوک ۷۶۲۲۳ کا اعشاریہ لوکارتمی ۸۸۲۱۲۵۹٫ ہے،
مفصلہ ذیل اعداد کے لوکارتم لکھو۔
۷۶۲۲۳، ۷۶٫۲۲۳، ۷۶۲٫۲۳، ۰٫۰۰۷۶۲۲۳، ۷۶۲۲۳۰۰٫، ۷۶۲۲۳۰۰۰٫

۳- جن عددوں کے لوکارتم بالترتیب ۳٫۰۱۰۳، ۴٫۳۱۲۱۷۴۱
۷۹۸۹۶٫۳، ۵٫۶۵۱۵ ہیں اُن کے صحیح حصوں میں ہندسوں کی تعداد
دریافت کرو۔

۴- جن عددوں کے لوکارتم ۳۱۵۱۳٫۷۷، $\bar{۳}$٫۸۱۵۰۱۹۶،
۴۸۳۱۷۸٫$\bar{۵}$ ہیں اُن کے پہلے ملحوظ ہندسوں کے مقام دریافت کرو۔
معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫
اور لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰٫
مفصلۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

۵- لوک ۶۴   ۶- لوک ۴۸   ۷- لوک ۱۲۸٫۱

۸- لوک ۰٫۱۲۵   ۹- لوک ۴٫۴   ۱۰- لوک $\frac{۳}{۴}$ ۴

۱۱- لوک $\sqrt[۳]{۱۲}$   ۱۲- لوک $\sqrt{\frac{۳۵}{۲۷}}$   ۱۳- لوک $\sqrt[۴]{۰٫۱۰۵}$

۱۴- ۰٫۰۰۳۲۴ کا ساتواں جذر دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک ۴۴۰۹۳۸۸ = ۷٫۶۶۴۴۳۶۳۶

۱۵- معلوم ہے کہ لوک ۱۹۴٫۸۴۴۵ = ۳٫۲۸۹۶۸۴۲٫۳، $(۳۹٫۲)^۲$ کا گیارہواں جذر دریافت کرو۔

۱۶- ۳۰۲۰۳٫۷، ۳۰۲۰۳٫۷۳، ۳۰۲۰۳٫۷۰۰ اور ۳۰۲۰۳۰٫۷۳ کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک ۳۰۲۰۳٫۷ = ۱٫۵۸۷۰۵۷۸۰
اور لوک ۱۹۱۵۶۳۱ = ۶٫۲۸۲۳۱۲۰

۱۷- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں۔

لوک $\sqrt[۳]{\frac{۳^۲ \times ۵}{۴^۲}}$ دریافت کرو

۱۸- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں۔

لوک $\left(\sqrt[۳]{۴۸} \times ۱۰۸^{\frac{۱}{۴}} \div \sqrt[۱۲]{۶}\right)$ دریافت کرو۔

۱۹- $\sqrt[۳]{\left(\frac{۱۲۵ \times ۲۹۴}{۳۲ \times ۴۲}\right)^۲}$ کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۷،
اور لوک ۹٫۷۶۲۲۲۶ = ۳٫۹۵۷۹٫۵۴

۲۰- $(۳۳۰ \div ۴۹)^۴ \div \sqrt[۳]{۲۲ \times ۷۰}$ کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۷، نیز لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷
اور لوک ۱۵۱٫۴۱۸۷ = ۲٫۱۸۰۲۵۱۷۴

۲۱- عدد $۳^{۱۲} \times ۲^۸$ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۲- ثابت کرو کہ $\left(\frac{۲۱}{۲۰}\right)^{۱۰۰}$ بڑا ہے ۱۰۰ سے۔

۲۳۔ عدد $(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰۰}$ میں علامت اعشاریہ اور پہلے ملحوظ ہندسے کے درمیان صفروں کی تعداد دریافت کرو۔

مفصلۂ ذیل مساواتوں کو حل کرو۔ معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۷

۲۴۔ $۳^{لا-۲} = ۵$

۲۵۔ $۵^{لا} = ۱۰^{۳}$

۲۶۔ $۵^{۵-۳لا} = ۲^{لا+۲}$

۲۷۔ $۲۱^{لا} = ۲^{۴لا+۱} \times ۵^{لا}$

۲۸۔ $۲^{لا} \times ۶^{لا-۲} = ۵^{۲لا} \times ۷^{۱-لا}$

۲۹۔ $\begin{cases} ۲^{لا+ما} = ۶^{ما} \\ ۳^{لا} = ۳ \times ۲^{ما+۱} \end{cases}$

۳۰۔ $۳^{۱-لا-ما} = ۴^{-ما}$

$۲^{۲لا-۱} = ۳^{۳ما-لا}$

۳۱۔ معلوم ہے کہ $لوک_{۱۰} ۲ = ۳۰۱۰۳ء$، $لوک_{۲۵} ۲۰۰$ دریافت کرو۔

۳۲۔ معلوم ہے کہ $لوک_{۱۰} ۲ = ۳۰۱۰۳ء$ اور $لوک_{۱۰} ۷ = ۸۴۵۰۹۸ء$

$لوک_{۱۲} \sqrt{۲}$ اور $لوک_{۲۴} ۷$ دریافت کرو۔

---

# باب ہفدہم

## قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے

۲۲۳- گزشتہ باب میں ہم نے یہ ذکر کیا تھا کہ مروج لوکارتم براہِ راست نہیں نکالے جاتے لیکن پہلے وہ ایک خاص اساس پر نکالے جاتے ہیں اور اس کے بعد اساس دہ میں منتقل کر دیے جاتے ہیں۔

اس باب میں ہم چند قوانین جبریہ، جن کو قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے کہتے ہیں، ثابت کریں گے اور مختصر طور پر یہ بیان کریں گے کہ ان کی مدد سے لوکارتمی جدولیں کس طرح مرتب ہوتی ہیں۔

۲۲۴- $\text{ا}^{\text{لا}}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

اگر ن ایک سے بڑا ہو تو مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = 1 + \text{ن لا} \times \frac{1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-1)}{\underline{|2}} \times \frac{1}{\text{ن}^{2}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-1)(\text{ن لا}-2)}{\underline{|3}} \times \frac{1}{\text{ن}^{3}} + \dots$$

$$= 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{2}{\text{ن}}\right)}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots \quad (1)$$

لا = ۱ رکھنے سے

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{۱} + \frac{\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots \quad (\text{۲})$$

لیکن $\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = \left\{\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}}$

اس لیے معلوم ہوا کہ سلسلہ (۱) سلسلہ (۲) کی لاویں قوت ہے، یعنی

$$\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا} - \frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$$

$$= \left\{\text{۱} + \text{۱} + \frac{\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots\right\}^{\text{لا}}$$

اور یہ درست ہے خواہ ن کی قیمت کتنی بھی بڑی ہو، اس لیے اگر ن کو لا انتہا بڑھایا جائے تو

$$\text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\underline{|\text{۴}}} + \ldots\ldots$$

$$= \left(\text{۱} + \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{۴}}} + \ldots\ldots\right)^{\text{لا}}$$

ہم سلسلہ $\text{۱} + \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$ کو قوت نما کے پہلے دو حرف "قو" یا اختصار کی خاطر نقطے گرا کر "و" سے تعبیر کرینگے۔

اس لیے $\text{و}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$

لا کی جگہ ج لا لکھنے سے

$$\text{و}^{\text{ج لا}} = \text{۱} + \text{ج لا} + \frac{\text{ج}^{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \frac{\text{ج}^{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}}}{\underline{|\text{۳}}} + \ldots\ldots$$

اب فرض کرو کہ $\text{و}^{\text{ج}} = \text{ڈ}$ اس لیے $\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ڈ}$، اوپر کے سلسلے میں ج کی قیمت رکھنے سے

$$\text{د}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا لوکِ د} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{لوکِ د})^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}(\text{لوکِ د})^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \cdots\cdots$$

اس کو مسئلہ **قوت نما** کہتے ہیں۔

**نتیجۂ صریح**۔ جب ن لا انتہا بڑا ہو تو نہا $(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = \text{و}$

نیز جیسے اوپر عمل ہوا ہے اُسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ن کو لا انتہا بڑھایا جائے تو

$$(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\lfloor\text{۳}} + \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\lfloor\text{۴}} + \cdots\cdots$$

یعنی جب ن لاتناہی ہو تو نہا $(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{لا}}$

اگر $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی جگہ $(-\frac{\text{۱}}{\text{م}})$ رکھا جائے تو

$$(\text{۱} - \frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = (\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{م}})^{-\text{م لا}} = \left[(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{م}})^{\text{م}}\right]^{-\text{لا}}$$

اب اگر ن مائل بہ لاتناہی ہو تو م بھی مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے۔

پس نہا $(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = \text{و}^{-\text{لا}}$

اس لیے نہا $(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = \text{و}^{-\text{۱}}$

۲۲۵۔ دفعہ گزشتہ میں لا کی قیمت پر کوئی قید نہیں رکھی گئی۔ نیز چونکہ $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ اکائی سے کم ہے، اس لیے جو تفصیلی صورتیں ہم نے اوپر استعمال کی ہیں اور ان سے جو نتائج اخذ کیے ہیں وہ بلحاظ حسابی قیمت کے درست اور بامعنی ہیں۔

لیکن اوپر دیے ہوئے ثبوت میں ایک بات قابلِ غور ہے۔

ہم نے یہ مان لیا ہے کہ جب ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے

$\dfrac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{2}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{لا}-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}}$ کی انتہا ر کی تمام قیمتوں

کے لیے $\dfrac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}$ ہے۔

اگر $\dfrac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{2}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{لا}-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}}$ کو $\text{ص}_{\text{ر}}$ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{ص}_{\text{ر}}}{\text{ص}_{\text{ر}-1}} = \frac{1}{\text{ر}}\left(\text{لا}-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right) = \frac{\text{لا}}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}\,\text{ر}}$$

چونکہ ن لاتناہی ہے، اس لیے $\dfrac{\text{ص}_{\text{ر}}}{\text{ص}_{\text{ر}-1}} = \dfrac{\text{لا}}{\text{ر}}$ یعنی $\text{ص}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{لا}}{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}-1}$

ظاہر ہے کہ $\text{ص}_2$ کی انتہا $\dfrac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}$ ہے، اس لیے $\text{ص}_3$ کی انتہا $\dfrac{\text{لا}^3}{\underline{|3}}$ ہے اور

$\text{ص}_4$ کی $\dfrac{\text{لا}^4}{\underline{|4}}$ اور بالعموم $\text{ص}_{\text{ر}}$ کی $\dfrac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}}$

۲۲۶۔ لا کی تمام محدود قیمتوں کے لیے $\text{ق}^{\text{لا}}$ کی صورت تفصیلی مستدق ہے، اگر $\text{ص}_{\text{ن}}$ سے ن ویں رقم تعبیر کی جاوے تو

$$\frac{\text{ص}_{\text{ن}+1}}{\text{ص}_{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\underline{|\text{ن}+1}} \times \frac{\underline{|\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left|\frac{\text{ص}_{\text{ن}+1}}{\text{ص}_{\text{ن}}}\right| = 0 < 1$$

اس لیے معلوم ہوا کہ سلسلہ زیر بحث مستدق ہے۔

۲۲۷۔ جو لاتناہی سلسلہ $\text{ق}^{\text{لا}}$ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مستدق ہے اور اس کی قیمت کا اندازہ اعشاریہ کے چند مقام تک بآسانی ہو سکتا ہے۔ یہ حساب لگانا آسان ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم ن ویں رقم کو ن پر تقسیم

کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

پہلی رقم = ۱

دوسری رقم = ۱

تیسری رقم = دوسری رقم ÷ ۲ = ۰٫۵

چوتھی رقم = تیسری رقم ÷ ۳ = ......۰٫۱۶۶۶۶۶۶

پانچویں رقم = چوتھی رقم ÷ ۴ = ......۰٫۰۴۱۶۶۶۶

چھٹی رقم = پانچویں رقم ÷ ۵ = ......۰٫۰۰۸۳۳۳۳

ساتویں رقم = چھٹی رقم ÷ ۶ = ......۰٫۰۰۱۳۸۸۸

آٹھویں رقم = ساتویں رقم ÷ ۷ = ......۰٫۰۰۰۱۹۸۴

نویں رقم = آٹھویں رقم ÷ ۸ = ......۰٫۰۰۰۰۲۴۸

دسویں رقم = نویں رقم ÷ ۹ = ......۰٫۰۰۰۰۰۲۸

گیارہویں رقم = دسویں رقم ÷ ۱۰ = ......۰٫۰۰۰۰۰۰۳

اس لیے جمع کرنے سے و = ......۰٫۰۰۰۰۰۲۸

مقدار و بڑی کار آمد ہے کیونکہ سب سے اول اس اساس پر تمام عددوں کے لوکارتم محسوب کیے جاتے ہیں اور اس کے بعد یہ لوکارتم مروج لوکارتموں میں تبدیل ہو سکتے ہیں۔ جو لوکارتم اساس و پر نکالے جاتے ہیں ان کو نیپیری[1] لوکارتم کہتے ہیں کیونکہ ان کو نیپیر نے ایجاد کیا تھا۔ نیز ان کو طبعی لوکارتم بھی کہتے ہیں کیونکہ تحقیقات جبریہ میں سب سے اول اسی قسم کے لوکارتموں پر غور کیا جاتا ہے۔

آئندہ یاد رہے کہ جب لوکارتم نظریات میں استعمال کیے جائیں تو ہمیشہ اساس و محذوف ہوتا ہے، اسی طرح عملی حسابات میں ہمیشہ اساس ۱۰ استعمال کرتے ہیں

مثال ۱۔ لامتناہی سلسلہ $1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|6}} + \ldots\ldots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ $و = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \ldots\ldots$

[1] Napierian

اور $و^{لا}$ کی صورت تفصیلی میں لا کو -۱ کے مساوی رکھنے سے

$$و^{-۱} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{|۲} - \frac{۱}{|۳} + \frac{۱}{|۴} - \cdots\cdots$$

اس لیے $و + و^{-۱} = ۲ \left(۱ + \frac{۱}{|۲} + \frac{۱}{|۴} + \frac{۱}{|۶} + \cdots\cdots\right)$

اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲}(و + و^{-۱})$

مثال ۴- $\frac{۱ - ۲لا - لا^۲}{و^{لا}}$ کی صورت تفصیلی میں $لا^ر$ کا سر دریافت کرو

$$\frac{۱ - ۲لا - لا^۲}{و^{لا}} = (۱ - ۲لا - لا^۲)\, و^{-لا}$$

$$= (۱ - ۲لا - لا^۲)\left\{۱ - لا + \frac{لا^۲}{|۲} - \frac{لا^۳}{|۳} + \cdots\cdots + \frac{(-۱)^ر لا^ر}{|ر} + \cdots\cdots\right\}$$

$$سر مطلوب = \frac{(-۱)^ر}{|ر} - \frac{(-۱)^{ر-۱}۲}{|ر-۱} - \frac{(-۱)^{ر-۲}}{|ر-۲}$$

$$= \frac{(-۱)^ر}{|ر}\left\{۱ + ۲ر - ر(ر - ۱)\right\}$$

۲۲۸ - $لوک_و(۱ + لا)$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ - بموجب دفعہ ۲۲۴

$$۲^{ما} = ۱ + ما\, لوک_و ۲ + \frac{ما^۲(لوک_و ۲)^۲}{|۲} + \frac{ما^۳(لوک_و ۲)^۳}{|۳} + \cdots\cdots$$

اس سلسلہ میں ۲ کی جگہ ۱ + لا رکھنے سے

$$(۱ + لا)^{ما} = ۱ + ما\, لوک_و(۱ + لا) + \frac{ما^۲\{لوک_و(۱ + لا)\}^۲}{|۲}$$
$$+ \frac{ما^۳\{لوک_و(۱ + لا)\}^۳}{|۳} + \cdots\cdots (۱)$$

نیز مسئلہ ثنائی کی مدد سے اگر لا < ا تو

$$(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ما}} = \text{ا} + \text{مالا} + \frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{ا})}{\lfloor\text{۲}} \text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{ا})(\text{ما}-\text{۲})}{\lfloor\text{۳}} \text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots(\text{۲})$$

اب (۲) میں ما کا سر ہے۔

$$\text{لا} + \frac{(-\text{ا})}{\text{۲}\times\text{ا}} \text{لا}^{\text{۲}} + \frac{(-\text{ا})(-\text{۲})}{\text{۳}\times\text{۲}\times\text{ا}} \text{لا}^{\text{۳}} + \frac{(-\text{ا})(-\text{۲})(-\text{۳})}{\text{۴}\times\text{۳}\times\text{۲}\times\text{ا}} \text{لا}^{\text{۴}} + \ldots\ldots$$

یعنی $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \ldots\ldots$

اس کو مساوات (ا) میں جو ما کا سر ہے اُس کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ا}+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\text{۴}} + \ldots\ldots(\text{۳})$$

اس کو لوکارثمی سلسلہ کہتے ہیں

$$\left|\frac{\text{صق}}{\text{صق}_{\text{ا-}}}\right| = \left|\frac{\text{ن - ا}}{\text{ن}}\,\text{لا}\right|$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left[\frac{\text{صق}}{\text{صق}_{\text{ا-}}}\right] = |\text{لا}|$$

اس لیے اگر لا بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے کم ہو تو سلسلہ متدق ہوگا۔

اگر لا = ا تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$$\text{ا} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \ldots\ldots$$

اور یہ سلسلہ متدق ہے۔

اگر لا = −ا تو سلسلہ کی صورت ہوگی۔

$$-۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}-\ldots\ldots$$

اور یہ سلسلہ غیر متدق ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم منفی لاتناہی ہوتا ہے اور یہی نتیجہ مساوات و$^{-\infty}$ = ۰ سے بھی ظاہر ہے۔

**مثال** — اگر لا > ۱ تو $\{\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{لا})\}^{۲}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

مندرجۂ بالا نتائج (۱) اور (۲) میں $\text{ا}^{۲}$ کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ صورت تفصیلی

$$\text{جملہ}\ \frac{\text{ا}(\text{ا}-۱)}{۲\times۱}\text{لا}^{۲}+\frac{\text{ا}(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)}{۳\times۲\times۱}\text{لا}^{۳}+\frac{\text{ا}(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)(\text{ا}-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\text{لا}^{۴}+\ldots$$

میں $\text{ا}^{۲}$ کے سر کی دوچند ہے۔

$$\text{یعنی جملہ}\ \frac{(\text{ا}-۱)}{۲\times۱}\text{لا}^{۲}+\frac{(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)}{۳\times۲\times۱}\text{لا}^{۳}+\frac{(\text{ا}-۱)(\text{ا}-۲)(\text{ا}-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\text{لا}^{۴}+\ldots$$

میں ا کے سر کی دوچند ہے۔

$$\text{پس}\ \{\text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{لا})\}^{۲}=۲\left\{\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}-\frac{۱}{۳}\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\text{لا}^{۳}+\frac{۱}{۴}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)\text{لا}^{۴}-\ldots\right\}$$

**۲۲۹** — سوائے اُس صورت کے جبکہ لا بہت چھوٹا ہے لوک (۱ + لا) کی صورت تفصیلی عملی حسابات میں مفید ثابت نہیں ہوتی لیکن اس سے اور سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن کی مدد سے لوکارتمی جدولیں بآسانی مرتب ہو سکتی ہیں۔

لا کی جگہ $\frac{۱}{\text{ن}}$ لکھنے سے ہمیں $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}}$ کی صورت تفصیلی حاصل ہوتی ہے، اس لیے

لوک‌و (ن + ۱) - لوک‌و ن = ۱/ن - ۱/۲ن² + ۱/۳ن³ - ......... (۱)

لا کی جگہ (- ۱/ن) لکھنے سے ہمیں لوک‌و (ن-۱)/ن حاصل ہوگا، اس لیے مساوات کے دونوں طرف علامات بدل دینے سے

لوک‌و ن - لوک‌و (ن - ۱) = ۱/ن + ۱/۲ن² + ۱/۳ن³ + ......... (۲)

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

لوک‌و (ن + ۱) - لوک‌و (ن - ۱) = ۲ (۱/ن + ۱/۳ن³ + ۱/۵ن⁵ + ......) (۳)

مساوات (۳) میں فرض کرو کہ ن = ۳، اس طرح سے حاصل ہوگا لوک‌و ۴ - لوک‌و ۲ یعنی لوک‌و ۲ اور حساب لگانے سے معلوم ہوگا کہ لوک‌و ۲ = ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۸ ......، جس سے لوک‌و ۸ معلوم ہوسکتا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن = ۹ ہمیں حاصل ہوگا لوک‌و ۱۰ - لوک‌و ۸ جس سے

لوک‌و ۱۰ = ۲٫۳۰۲۵۸۵۰۹ ......

نیپیری لوکارتموں کو عشری لوکارتموں میں منتقل کرنے کے لیے ہمیں اول الذکر کو ۱/لوک‌و ۱۰ سے ضرب دینی پڑتی ہے، ۱/لوک‌و ۱۰ مروج لوکارتم کا مقیاس کہلاتا ہے اور اس کی قیمت

۱/(۲٫۳۰۲۵۸۵۰۹ ......) یا ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸ ...... ہے ہم اس مقیاس کو

"مہ" سے تعبیر کرینگے۔

۲۳۰ - اگر ہم مندرجۂ بالا سلسلوں کو مہ سے ضرب دیں تو ہمیں ایسے ضابطے حاصل ہونگے جو مروج لوکارتموں کے حساب لگانے میں موزوں ثابت ہوتے ہیں۔

مثلاً (۱) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مہ لوک}_{و}(\text{ن}+1) - \text{مہ لوک}_{و}\text{ن} = \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} - \frac{\text{مہ}}{2\text{ن}^2} + \frac{\text{مہ}}{3\text{ن}^3} - \cdots\cdots$$

یعنی

$$\text{لوک}_{10}(\text{ن}+1) - \text{لوک}_{10}\text{ن} = \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} - \frac{\text{مہ}}{2\text{ن}^2} + \frac{\text{مہ}}{3\text{ن}^3} - \cdots\cdots \quad (1)$$

اسی طرح (۲) سے

$$\text{لوک}_{10}\text{ن} - \text{لوک}_{10}(\text{ن}-1) = \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} + \frac{\text{مہ}}{2\text{ن}^2} + \frac{\text{مہ}}{3\text{ن}^3} + \cdots\cdots \quad (2)$$

اوپر کے نتائج سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل اعداد میں سے کسی ایک کا لوکارتم معلوم ہو تو دوسرے کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے اور اس طرح سے ایک لوکارتمی جدول مرتب ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اوپر کے قوانین کی ضرورت صرف مفرد اعداد کے لوکارتم نکالنے میں پڑتی ہے کیونکہ مرکب اعداد کے لوکارتم ان کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کو جمع کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اگر کسی چھوٹے عدد مفرد کا لوکارتم نکالنا منظور ہو تو ہمیں براہ راست اُس عدد کو ضابطہ (۱) یا (۲) میں نہیں درج کر دینا چاہیے بلکہ ن کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہیے جس سے عمل تقسیم میں آسانی ہو اور علاوہ اس کے وہ قیمت ایسی ہو کہ دیا ہوا عدد مفرد بطور جزو ضربی کے ن + ۱ یا ن - ۱ میں شامل ہو، اس طرح سے ہم لوک (ن + ۱) یا لوک (ن - ۱) دریافت کر سکتے ہیں اور اس سے دیے ہوئے عدد کا لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے۔

**مثال** ۔ معلوم ہے کہ مہ = ۰ء۴۳۴۲۹۴۴۸، لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم کرو ۔

ضابطہ (۲) میں رکھو ن = ۱۰ اس سے ہمیں لوک ۱۰ ۔ لوک ۹ کی قیمت حاصل ہوگی پس

۱ - ۲ لوک ۳ = ۰ء۰۴۳۴۲۹۴۴۸ + ۰ء۰۰۲۱۷۱۴۷۲
+ ۰ء۰۰۰۱۴۴۷۶۵ + ۰ء۰۰۰۰۱۰۸۵۷
+ ۰ء۰۰۰۰۰۰۸۶۸ + ۰ء۰۰۰۰۰۰۰۷۲
+ ۰ء۰۰۰۰۰۰۰۰۶

۱ - ۲ لوک ۳ = ۰ء۰۴۵۷۵۷۴۸۸
لوک ۳ = ۰ء۴۷۷۱۲۱۲۵۶

(۱) میں رکھو ن = ۸۰ تو حاصل ہوگا لوک ۸۱ - لوک ۸۰ پس

۴ لوک ۳ - ۳ لوک ۲ - ۱ = ۰ء۰۰۵۴۲۸۶۸۱ - ۰ء۰۰۰۰۳۳۹۲۹
+ ۰ء۰۰۰۰۰۰۲۸۳ - ۰ء۰۰۰۰۰۰۰۰۳

۳ لوک ۲ = ۰ء۹۰۸۴۸۵۰۲۴ - ۰ء۰۰۵۳۹۵۰۳۲
لوک ۲ = ۰ء۳۰۱۰۲۹۹۹۷

اگلی دفعہ میں لوک (ن + ۱) ۔ لوک ن کے لیے ہم ایک اور سلسلہ دریافت کرینگے جو لوکارتمی جدولوں کے مرتب کرنے میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے ۔

**۲۳۱** ۔ دفعہ ۲۲۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,(۱ + \text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} + \cdots\cdots$$

لا کو ( - لا ) میں تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,(۱ - \text{لا}) = -\,\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} - \cdots\cdots$$

عمل تفریق سے

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{3}}{3} + \frac{\text{لا}^{5}}{5} + \cdots\cdots\right)$$

فرض کرو کہ $\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$ جس سے $\text{لا} = \frac{1}{2\text{ن}+1}$،

پس حاصل ہوگا

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+1) - \text{لوک}_{\text{و}}\text{ن} = 2\left\{\frac{1}{2\text{ن}+1} + \frac{1}{3(2\text{ن}+1)^{3}} + \frac{1}{5(2\text{ن}+1)^{5}} + \cdots\right\}$$

**نوٹ** - اس سلسلہ کی رقموں کی عددی قیمت بڑی سرعت سے گھٹتی ہے، لیکن عملی حسابات میں دفعہ ۲۲۹ کے سلسلے زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔

**۲۳۲** - مندرجۂ ذیل مثالیں اس باب کے مضمون کی توضیح کے لیے دی گئی ہیں۔

**مثال ۱** - سلسلہ $1 - \frac{1}{1!\,3} + \frac{1}{2!\,9} - \frac{1}{3!\,27} + \frac{1}{4!\,81} - \cdots$

کا مجموعہ دریافت کرو۔

ظاہر ہے کہ $\text{و}^{\text{لا}}$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا} = -\frac{1}{3}$ درج کرنے سے دیا ہوا سلسلہ حاصل ہوتا ہے، اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ $= \text{و}^{-\frac{1}{3}}$

**مثال ۲** - ایک لامتناہی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{\text{ن}^{3}}{\text{ن}!}$ ہے اس کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$\text{ن ویں رقم} = \frac{\text{ن}^{3}}{\text{ن}!} = \frac{\text{ن}^{2}}{(\text{ن}-1)!} = \frac{1}{(\text{ن}-1)!} + \frac{\text{ن}^{2}-1}{(\text{ن}-1)!}$$

$$= \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۱} + \frac{\text{ن} + ۱}{\lfloor \text{ن} - ۲} = \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۱} + \frac{۳}{\lfloor \text{ن} - ۲} + \frac{\text{ن} - ۲}{\lfloor \text{ن} - ۲}$$

$$= \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۱} + \frac{۳}{\lfloor \text{ن} - ۲} + \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۳}$$

$$(\text{ن} - ۱)\text{ ویں رقم } = \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۲} + \frac{۳}{\lfloor \text{ن} - ۳} + \frac{۱}{\lfloor \text{ن} - ۴}$$

..............................................................

$$\text{چوتھی رقم } = \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۳}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۱}$$

$$\text{تیسری رقم } = \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۳}{\lfloor ۱} + ۱$$

$$\text{دوسری رقم } = \frac{۱}{\lfloor ۱} + ۳$$

$$\text{پہلی رقم } = ۱$$

عمودی سطروں کو جمع کرنے اور ن کو لاانتہا بڑھانے سے سلسلہ
= و + ۳ و + و = ۵ و

**مثال ۳۔** اگر عہ اور بہ مساوات ا لا$^{۲}$ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}(\text{ا} - \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲}) = \text{لوک ا} + (\text{عہ} + \text{بہ})\text{لا} - \frac{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{عہ}^{۳} + \text{بہ}^{۳}}{۳}\text{لا}^{۳} - \dots$$

$$\text{چونکہ } \text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{ ، عہ بہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\text{ اس لیے}$$

$$\text{ا} - \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲} = \text{ا}\left\{۱ + (\text{عہ} + \text{بہ})\text{لا} + \text{عہ بہ لا}^{۲}\right\} = \text{ا}(۱ + \text{عہ لا})(۱ + \text{بہ لا})$$

$$\therefore \text{لوک}(\text{ا} - \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲}) = \text{لوک ا} + \text{لوک}(۱ + \text{عہ لا}) + \text{لوک}(۱ + \text{بہ لا})$$

$$= \text{لوک ل} + \text{عہ لا} - \frac{\text{عہ}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{لا}^{۳}}{۳} - \dots\dots + \text{بہ لا} - \frac{\text{بہ}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{بہ}^{۳}\,\text{لا}^{۳}}{۳} - \dots\dots$$

$$= \text{لوک ل} + (\text{عہ} + \text{بہ})\,\text{لا} - \frac{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}{۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{عہ}^{۳} + \text{بہ}^{۳}}{۳}\,\text{لا}^{۳} - \dots\dots$$

**مثال ۴** ۔ ثابت کرو کہ لوک $(۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲})$ کی صورت تفصیلی میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $(-\frac{۲}{\text{ن}})$ یا $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہے بموجب اس کے کہ ن تین کا ضعف ہے یا نہیں۔

$$\text{لوک}\,(۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲}) = \text{لوک}\,\frac{۱ - \text{لا}^{۳}}{۱ - \text{لا}} = \text{لوک}\,(۱ - \text{لا}^{۳}) - \text{لوک}\,(۱ - \text{لا})$$

$$= -\text{لا}^{۳} - \frac{\text{لا}^{۶}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۹}}{۳} - \dots\dots - \frac{\text{لا}^{۳\text{ر}}}{\text{ر}} - \dots\dots$$

$$+ \left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \dots\dots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{ر}} + \dots\dots\right)$$

اگر ن تین کا ضعف ہو تو اس کو ۳ ر سے تعبیر کرو، اس صورت میں پہلے سلسلے سے $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $(-\frac{۱}{\text{ر}})$ ہوگا اور دوسرے سلسلے سے $\frac{۱}{۳\text{ر}}$ یعنی سر مطلوب $-\frac{۳}{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ن}}$ یعنی $-\frac{۲}{\text{ن}}$ ہوگا۔

اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو پہلے سلسلے میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ واقع نہیں ہوگا اس لیے اس صورت میں سر مطلوب $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہوگا۔

۲۳۳ ۔ ثابت کرو کہ و مقدار متباین ہے۔

اگر و متباین نہ ہو تو فرض کرو کہ $\text{و} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ جہاں م اور ن مثبت

صحیح عدد ہیں۔

تب $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots + \frac{۱}{\lfloor \text{ن}} + \frac{۱}{\lfloor \text{ن}+۱} + \cdots$

طرفین کو $\lfloor \text{ن}$ میں ضرب دینے سے

$$\text{م} \lfloor \text{ن}-۱ = \text{ایک صحیح عدد} + \frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)} + \cdots$$

لیکن $\frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)} + \cdots$

ایک کسر واجب ہے کیونکہ یہ $\frac{۱}{\text{ن}+۱}$ سے بڑی ہے اور سلسلۂ ہندسیہ

$$\frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)^۲} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)^۳} + \cdots$$

یعنی $\frac{۱}{\text{ن}}$ سے چھوٹی ہے، اس لیے ایک صحیح عدد ایک صحیح اور کسر کے حاصل جمع کے برابر ہوا جو کہ باطل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ہ مقدار متبائن ہے۔

# امثلہ نمبری ۱۷

۱- ثابت کرو کہ $\left\{۱ + \frac{۱}{\lfloor ۱} + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots\right\}\left\{۱ - \frac{۱}{\lfloor ۱} + \frac{۱}{\lfloor ۲} - \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots\right\} = ۱$

۲- سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \cdots$ کی قیمت دریافت کرو۔

۳ ۔ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 2^2} + \frac{1}{3\times 2^3} - \frac{1}{4\times 2^4} + \frac{1}{5\times 2^5} - \ldots$ کی قیمت دریافت کرو۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_\text{و}(\text{ن}+\text{د}) - \text{لوک}_\text{و}(\text{ن}-\text{د}) = 2\left(\frac{\text{د}}{\text{ن}} + \frac{\text{د}^3}{3\,\text{ن}^3} + \frac{\text{د}^5}{5\,\text{ن}^5} + \ldots\right)$$

۵ ۔ اگر $\text{م} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \ldots$

تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{م} + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{م}^3}{\lfloor 3} + \ldots$

۶ ۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{د}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{د}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{د}}\right)^3 + \ldots$

$= \text{لوک}_\text{و}\,\text{د} - \text{لوک}_\text{و}\,\text{ب}$

۷ ۔ اعشاریہ کے ۶ مقام تک $\frac{1001}{999}$ کا نیپیری لوکارتم دریافت کرو۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ $\text{و}^{-1} = 2\left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{2}{\lfloor 5} + \frac{3}{\lfloor 7} + \ldots\right)$

۹ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_\text{و}\left((1+\text{لا})^{1+\text{لا}}(1-\text{لا})^{1-\text{لا}}\right) = 2\left(\frac{\text{لا}^2}{1\times 2} + \frac{\text{لا}^4}{3\times 4} + \frac{\text{لا}^6}{5\times 6} + \ldots\right)$$

۱۰ ۔ $\text{لا}^2 - \text{م}^2 + \frac{1}{\lfloor 2}(\text{لا}^4 - \text{م}^4) + \frac{1}{\lfloor 3}(\text{لا}^6 - \text{م}^6) + \ldots$ کی قیمت دریافت کرو

۱۱ ۔ ۷، ۱۱، ۱۳ کے مروج لوکارتموں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔ معلوم ہے کہ مہ = ۰.۴۳۴۲۹۴۴۸ اور لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰۰ ۔

۱۲ ۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{د}\,\text{لا}^2$ اور $\frac{\text{د}}{\text{لا}^2}$ دونوں ایک سے کم ہوں تو

$$\text{ا}\left(\text{لا}^{۲}+\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right)-\frac{\text{ا}^{۲}}{۲}\left(\text{لا}^{۴}+\frac{۱}{\text{لا}^{۴}}\right)+\frac{\text{ا}^{۳}}{۳}\left(\text{لا}^{۶}+\frac{۱}{\text{لا}^{۶}}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱+\text{ا لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}+\frac{\text{ا}}{\text{لا}^{۲}}\right)$$

۱۳ - ثابت کرو کہ $\text{لوک}_{\text{و}}(۱+۳\,\text{لا}+۲\,\text{لا}^{۲})=۳\,\text{لا}-\frac{۵\,\text{لا}^{۲}}{۲}+\frac{۹\,\text{لا}^{۳}}{۳}-\frac{۱۷\,\text{لا}^{۴}}{۴}+\ldots\ldots$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۴ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{۱+۳\,\text{لا}}{۱-۲\,\text{لا}}=۵\,\text{لا}-\frac{۵\,\text{لا}^{۲}}{۲}+\frac{۳۵\,\text{لا}^{۳}}{۳}-\frac{۶۵\,\text{لا}^{۴}}{۴}+\ldots\ldots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۵ - $\dfrac{\text{و}^{۵\text{لا}}+\text{و}^{\text{لا}}}{\text{و}^{۳\text{لا}}}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۱۶ - $\frac{۱}{۲}\left(\text{و}^{\text{خ لا}}+\text{و}^{-\text{خ لا}}\right)$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

جہاں $\text{خ}=\sqrt{-۱}$

۱۷ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا}+۲\,\text{ھ})=۲\,\text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا}+\text{ھ})-\text{لوک}_{\text{و}}\text{لا}$$

$$-\left\{\frac{\text{ھ}^{۲}}{(\text{لا}+\text{ھ})^{۲}}+\frac{\text{ھ}^{۴}}{۲(\text{لا}+\text{ھ})^{۴}}+\frac{\text{ھ}^{۶}}{۳(\text{لا}+\text{ھ})^{۶}}+\ldots\ldots\right\}$$

۱۸ - ثابت کرو کہ $۱+\dfrac{۱+۲}{\underline{|۱}}+\dfrac{۱+۲+۳}{\underline{|۲}}+\ldots\ldots$ تا لاتناہی $=\dfrac{۵\,\text{و}}{۲}$

۱۹ - ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ن}=\dfrac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+۱}+\dfrac{۱}{۳}\left(\dfrac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+۱}\right)^{۳}$

$$+\frac{۱}{۵}\left(\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+۱}\right)^{۵}+\ldots\ldots$$

۲۰ - ثابت کرو کہ متصلہ صحیح اعداد کے لوکارتھموں کا فرق متواتر کم ہوتا ہے۔

۲۱ - ثابت کرو کہ $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}+۱) + \text{لوک}_{\text{و}}(\text{ن}-۱) - ۲\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ن}$

$$= -\left\{\frac{۱}{۲\text{ن}^۲-۱} + \frac{۱}{۳(۲\text{ن}^۲-۱)^۳} + \frac{۱}{۵(۲\text{ن}^۲-۱)^۵} + \cdots\cdots\right\}$$

۲۲ - اگر عہ اور بہ مساوات $\text{لا}^۲ - \text{ف}\,\text{لا} + \text{ق} = ۰$ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(۱ + \text{ف}\,\text{لا} + \text{ق}\,\text{لا}^۲) = (\text{عہ} + \text{بہ})\,\text{لا} - \frac{\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲}{۲}\,\text{لا}^۲$$

$$+ \frac{\text{عہ}^۳ + \text{بہ}^۳}{۳}\,\text{لا}^۳ - \cdots\cdots\cdots$$

۲۳ - اگر $\text{لا} < ۱$ تو سلسلہ $\frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ + \frac{۲}{۳}\text{لا}^۳ + \frac{۳}{۴}\text{لا}^۴ + \cdots\cdots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۴ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = ۱ - \frac{۱}{۲(\text{ن}+۱)} - \frac{۱}{۲\times۳(\text{ن}+۱)^۲} - \frac{۱}{۳\times۴(\text{ن}+۱)^۳} - \cdots\cdots$$

۲۵ - اگر $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{۱}{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳}$ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلایا جائے جس میں لا کی قوتیں بتدریج بڑھتی ہیں، تو ثابت کرو کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $-\frac{۱}{\text{ن}}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴ م + ۲ ہو یا ن طاق عدد ہو اور $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{۳}{\text{ن}}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴ م ہو

۲۶ - ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۲^۳}{\underline{|۲}} + \frac{۳^۳}{\underline{|۳}} + \frac{۴^۳}{\underline{|۴}} + \cdots\cdots = ۵\,\text{ہ}$$

۲۷ ـ ثابت کرو کہ

$$\text{۲ لوگ}_{\text{و}}\text{ن} - \text{لوگ}_{\text{و}}(\text{ن}+\text{۱}) - \text{لوگ}_{\text{و}}(\text{ن}-\text{۱})$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲ن}^{\text{۴}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳ن}^{\text{۶}}} + \cdots\cdots$$

۲۸ ـ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}(\text{ن}+\text{۱})^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}(\text{ن}+\text{۱})^{\text{۳}}} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{ن}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲ن}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳ن}^{\text{۳}}} - \cdots\cdots$$

۲۹ ـ اگر $\text{لوگ}_{\text{و}}\frac{\text{۹}}{\text{۱۰}} = -\text{ا}$ ، $\text{لوگ}_{\text{و}}\frac{\text{۲۴}}{\text{۲۵}} = -\text{ب}$ اور $\text{لوگ}_{\text{و}}\frac{\text{۸۱}}{\text{۸۰}} = \text{ج}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۲} = \text{۷ا} - \text{۲ب} + \text{۳ج}$$

$$\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۳} = \text{۱۱ا} - \text{۳ب} + \text{۵ج}$$

$$\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۵} = \text{۱۶ا} - \text{۴ب} + \text{۷ج}$$

اور $\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۲}$ ، $\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۳}$ ، $\text{لوگ}_{\text{و}}\text{۵}$ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۸ مقام تک محسوب کرو۔

تمت

# جوابات

## امثلہ نمبری ۱

۱ ـ (۱) ۴۵ ب : ا  (۲) ۹ : ۷  (۳) ب لا : ا ما

۲ ـ ۱۸  ۳ ـ ۳۸۵، ۶۶۰  ۴ ـ ۱۱

۵ ـ ۵ : ۱۳  ۶ ـ ۵ : ۶ یا ـ ۳ : ۵

۱۱ ـ لا/۴ = ما/۲ = ی/۳ یا لا/۱ = ما/۱- = ی

۱۸ ـ ا ب ج + ۲ ف گ ھ ـ ا ف$^{2}$ ـ ب گ$^{2}$ ـ ج ھ$^{2}$ = ۰

۲۱ ـ ۳، ۴، ۱  ۲۲ ـ ـ۳، ۴، ۱

۲۳ ـ ۷، ۳، ۲  ۲۴ ـ ۳، ۴، ۱

۲۶ ـ ± ا (ب$^{2}$ ـ ج$^{2}$)، ± ب (ج$^{2}$ ـ ا$^{2}$)، ± ج (ا$^{2}$ ـ ب$^{2}$)

۲۷ ـ ب ج (ب ـ ج)، ج ا (ج ـ ا)، ا ب (ا ـ ب)

## امثلہ نمبری ۲

۱ ـ ۴۵  ۲ ـ (۱) ۱۲ (۲) ۳۰۰ ا$^{3}$ ب

۳ ـ لا$^{3}$ / ما (لا$^{2}$ + ما$^{2}$)  ۱۳ ـ ۰، ۵، ۸/۷  ۱۴ ـ ۰، ۳۲، ۸

۱۵ ۔ $\frac{ا(ب + ج)}{ج م - ب م - ۲ ا ن}$ ۱۸ ۔ ۸

۱۹ ۔ ۶، ۹، ۱۰، ۱۵ ۲۰ ۔ ۳ گیلن ا سے اور ۸ گیلن ب سے

۲۱ ۔ ۵۴ گیلن ۲۳ ۔ ۱۷ : ۳ ۲۴ ۔ ا = ۴ ب

۲۵ ۔ ۶۴ فیصدی تانبا اور ۳۶ فیصدی جست، ۵ حصے کانسے کے ساتھ ۳ حصے پیتل کے لیے گئے ہیں ۔

۲۶ ۔ ۶۳ یا ۱۲ منٹ

# امثلہ نمبری ۳

۱ ۔ $۵\frac{۱}{۳}$ ۲ ۔ ۹ ۳ ۔ $۱\frac{۱}{۳}$

۴ ۔ ۲ ۶ ۔ ۶۰ ۹ ۔ ما = ۲ لا ۔ $\frac{۸}{لا}$

۱۰ ۔ ما = ۵ لا + $\frac{۳۶}{۲لا}$ ۱۱ ۔ ۴ ۱۲ ۔ لا = $\frac{۲۲}{۱۵}$ ی + $\frac{۲}{۱۵ ی}$

۱۴ ۔ ۳۶ ۱۵ ۔ ۱۶ء۱۰ فٹ، ۹ء۵ ۳ء۰ فٹ

۱۶ ۔ $۲۲\frac{۱۱}{۲۴}$ مکعب فٹ ۱۷ ۔ ۴ : ۳

۱۸ ۔ تقریب ۶ دن رہی ۔ چوتھے، پانچویں، چھٹے دن

۲۰ ۔ ۱۶، ۲۵ سال ۔ ۲۰۰ روپیہ، ۲۵۰ روپیہ

۲۱ ۔ ۱ دن ۱۸ گھنٹہ ۲۸ منٹ

۲۲ ۔ لاگت کم سے کم ہو گی جبکہ رفتار ۱۲ میل فی گھنٹہ ہو اور اس صورت میں لاگت فی میل $\frac{۳}{۳۲}$ پونڈ ہو گی اور سفر کی لاگت ۹ پونڈ، ۱۷ شلنگ ۶ پینس ۔

# امثلہ نمبری ۴ ا

۱ - ۲۷۷ ½ ۲ - ۱۵۳ ۳ - صفر

۴ - $\frac{ن (۱۰ - ن)}{۳}$ ۵ - ۳۰ ۶ - ۴۲

۷ - ۱۸۵ ۸ - ۱۳۲۵ ۹ - ۷۵ ۵

۱۰ - ۲۰ ۸ ا - ۱۶۸۰ ب ۱۱ - ن (ن + ۱) ا - ن۲ ب

۱۲ - $\frac{۲۱}{۲}$ (۱۱ ا - ۹ ب)

۱۳ - - $\frac{۱}{۴}$، - $\frac{۳}{۴}$،.......... - ۹ $\frac{۱}{۱۴}$ ۱۴ - ا، - ۱ ½، ...... - ۳۹

۱۵ - - ۳۳ لا، - ۳۱ لا، ............... لا

۱۶ - لا۲ - لا + ۱، لا۲ - ۲ لا + ۲، ............ لا

۱۷ - ن۲ ۱۸ - ۳

۱۹ - ۵ ۲۰ - ۶۱۲ ۲۱ - ۴، ۹، ۱۴

۲۲ - ۱، ۴، ۷ ۲۳ - ۴۹۵ ۲۴ - ۱۶۰

۲۵ - $\frac{ع (ع + ۱)}{۲ ا}$ + ع ب ۲۶ - ن (ن + ۱) ا - $\frac{ن^۲}{ا}$

# امثلہ نمبری ۴ ب

۱ - ۱۰ یا - ۸ ۲ - ۸ یا - ۱۳ ۳ - ۲، ۵، ۸، ........

۴ - رقم اول ۸، تعداد ارقام ۹ ۵

۵ - رقم اول ½ ۷، تعداد ارقام ۴ ۵

۶ - قسطین ۱۵ روپیہ، ۳۵ روپیہ، ۵۵ روپیہ ........

۷ - ۱۲ ۸ - ۲۵

۹ - $\frac{ن}{۱۲ (۱ - لا)}$ (۲ + ن - ۳ $\overline{۱ لا}$) ۱۰ - ن۲ ۱۲ - ب (ف + ق)

۱۳- ۳، ۵، ۷، ۹ ۱۴- ۲، ۴، ۶، ۸ ۱۵- پ + ق - م

۱۶- ۱۲ یا - ۱۷ ۱۷- ۹ر - ۱ ۲۰- ۱۰ پ - ۸

۲۱- ۸ رقمیں۔ سلسلہ ہے $\frac{1}{2}$، ۱، ۳، $\frac{1}{2}$۳، ۴ ..........

۲۲- (۳، ۵، ۷) اور (۴، ۵، ۶) ۲۳- رلا = (ن + ۱ - ر) لا

# امثلہ نمبری ۱۵ ا

۱- $\frac{۲۰۵۹}{۱۴۵۸}$ ۲- $\frac{۱۲۸۱}{۵۱۲}$ ۳- $\frac{1}{۴}$ ۱۹۱

۴- ۶۸۲ ۵- $\frac{۱۰۹۳}{۴۵}$ ۶- $\frac{1}{۴}$ (۱ - $\frac{ع}{۵}$)

۷- $\frac{۹}{۷}$ {۱ - ($\frac{۴}{۳}$)ن} ۸- ۳۶۴ ($\sqrt{۳}$ + ۱)

۹- $\frac{1}{۲}$ (۵۸۵ - ۲ $\sqrt{۲۹۲}$) ۱۰- $\frac{۴۶۳}{۱۹۲}$

۱۱- $\frac{۳}{۲}$، ۱، $\frac{۲}{۳}$ ۱۲- $\frac{۱۶}{۳}$، ۸، .......... ۲۷

۱۳- - ۷، $\frac{۷}{۲}$، .......... $\frac{۷}{۳۲}$ ۱۴- $\frac{۶۴}{۹۵}$

۱۵- $\frac{۲۷}{۵۸}$ ۱۶- ۹۹۹ء ۱۷- $\frac{1}{۲}$

۱۸- $\frac{۳(۳ + \sqrt{۳})}{۲}$ ۱۹- ۷ (۷ + $\sqrt{۴۲}$) ۲۰- ۲

۲۱- ۱۶، ۲۴، ۳۶، ...... ۲۲- ۲ ۲۳- ۲

۲۴- ۸، ۱۲، ۱۸ ۲۵- ۲، ۶، ۱۸ ۲۸- ۶، ۳ $\frac{۱}{۲}$، ۱...

# امثلہ نمبری ۱۵ ب

۱- $\frac{۱ - لان}{(۱ - لا)^۲}$ - $\frac{ن لان}{۱ - لا}$ ۲- $\frac{۸}{۳}$

۳- $\frac{۱+لا}{(۱-لا)^۲}$ ۴- $۴ - \frac{۱}{۲^{ن-۲}} - \frac{ن}{۲^{ن-۱}}$ ۵- ۲

۶- $\frac{۱}{(۱-لا)^۳}$ ۹- $\frac{۱}{(۱-ب)(۱-دب)}$

۱۰- ۴۰، ۲۰، ۱۰ ۱۱- ۴، ۱، $\frac{۱}{۴}$، ......

۱۲- $\frac{لا(لا^ن-۱)}{لا-۱} + \frac{ن(ن+۱)ر}{۲}$

۱۳- $\frac{لا^۲(لا^{۲ن}-۱)}{لا^۲-۱} + \frac{لاما(لا^ن ما^ن-۱)}{لاما-۱}$

۱۴- $۴ع^۲ ر + \frac{۲}{۹}(۱ - \frac{۱}{۲ع^۲})$

۱۵- $۱\frac{۱}{۸}$ ۱۶- $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۱۸- $\frac{۴۰}{۸۱}(۱۰^ن-۱) - \frac{۴ن}{۹}$

۱۹- $ن - \frac{۱}{۹}\{۱ - \frac{۱}{۱۰^ن}\}$ ۲۰- $\frac{۳}{۲}(۳^ن-۱) - ۲ن$

۲۱- $\frac{۳}{۲}(۳^ن-۱-۲ن)$ ۲۳- $ن \times ۲^{ن+۲} - ۲^{ن+۱} + ۲$

۲۴- $\frac{(۱+ر)(ر^ن ج^ن-۱)}{رج-۱}$

۲۵- $\frac{ر}{ب-۱}\{\frac{ب(ب^{۲ن}-۱)}{ب^۲-۱} - ن\}$

## امثلہ نمبری ۱۶

۱- (۱) ۵ (۲) $۳\frac{۱}{۲}$ (۳) $۳\frac{۲۹}{۳۲}$

۲- $۶\frac{۱}{۹}$، $\frac{۶}{۷}$، ۷ ۳- $\frac{۲}{۵}$، $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۲}{۱۱}$

۴- ۶ اور ۲۴ ۵- ۴:۹ ۹- ۱۰، ۱۲، ۱۵

۱۰- ۱۲، ۳ ۱۱- ۴۵، ۵ ۱۲- ۲۳۴، ۱۰۴

# امثلہ نمبری ۶ ب

۱- ۲۹۱۵ ۲- $\frac{ن}{۲}(۶ن^۲ + ۳ن - ۱)$

۳- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۵)}{۱۲}$ ۴- $ن(۳ن^۲+۶ن+۱)$

۵- $\frac{ن}{۳}(۴ن^۲+۶ن-۱)$ ۶- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۴}$

۷- $ن^۲(۲ن^۲+۱)$ ۸- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$

۹- $ن^۲(ن+۱)$ ۱۰- $\frac{۱}{۴}ن(ن+۱)(ن^۲+ن+۳)$

۱۱- $ن(ن+۱)(۲ن+۷)$ ۱۲- $\frac{۱}{۴}ن(ن+۱)(ن^۲+۳ن+۱)$

۱۳- $\frac{۱}{۲}(۳^{ن+۱}+۱) - ۲^{ن+۱}$ ۱۴- $۴^{ن+۱} - ۴ - ن(ن+۱)(ن^۲-ن-۱)$

۱۵- $ن^۴$

۱۶- رقم اول = ا + ب + ج، ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک سے بڑی ہیں ن ویں رقم = ب + ج (۲ن - ۱)، پہلی رقم کے سوائے باقی تمام رقمیں سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔

۱۷- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶}$ ۱۸- $\frac{ن(ن+۱)(۴ن-۱)}{۶}$

۱۹- $\frac{ن(ن+۱)(۲ن-۱)}{۲}$ ۲۰- $\frac{ن(ن+۱)(۷ن-۴)}{۶}$

۲۱- $\frac{ن(ن+۱)(۸ن-۵)}{۶}$ ۲۲- $\frac{ن}{۲}(۲ن^۲+۵ن+۵)$

۲۳- $\frac{ن}{۶}(۲ن^۲-۳ن+۱۳)$ ۲۴- $\frac{ن}{۶}(۲ن^۲+۳ن+۷)$

۲۵- $\frac{ن}{۳(۲ن+۳)}$ ۲۶- $\frac{۶۶۷}{۹۳۰}$

۲۷- $\frac{ن}{۳(۲ن+۳)}$

۲۸- $\frac{ن(ن+۲)}{۳(۲ن+۱)(۲ن+۳)}$ ۲۹- ۱۲۴۰

۳۰- ۱۱۴۰ ۳۱- ۱۹۶۴۶ ۳۲- ۲۴۷۰

۳۳- ۲۱۳۲۱ ۳۴- ۵۲ ۳۵- ۱۱۸۷۹

۳۶- ۱۸۴۰ ۳۷- ۱۱۹۴۰ ۳۸- ۱۹۰

۳۹- ۳۰۰ ۴۰- ۱۸۲۹۶

۴۲- مثلثی ۳۶۴، مربع ۹۰۰ ۴۳- ۱۲۰ ۴۴- ن-۱

## امثلہ نمبر ۷

۱- $\frac{۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$، ۲- $\frac{۳+\sqrt{۶}+\sqrt{۱۵}}{۶}$

۳- $\frac{ا\sqrt{ب}+ب\sqrt{ا}-\sqrt{اب(ا+ب)}}{۲اب}$

۴- $\frac{ا-۱+\sqrt{ا^۲-۱}+\sqrt{۲ا(ا-۱)}}{ا-۱}$

۵- $\frac{۳\sqrt{۳۰}+۵\sqrt{۱۵}-۱۲-۱۰\sqrt{۲}}{۷}$، ۶- $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{۲}$

۷- $3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} + 3 \times 2 + 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{2} + 2^{\frac{5}{2}}$

۸- $5^{\frac{5}{6}} - 5^{\frac{4}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{6}} \times 2 + 5^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{5}{3}}$

۹- $\text{ا}^{\frac{11}{6}} - \text{ا}^{\frac{10}{6}}\,\text{ب}^{\frac{1}{4}} + \text{ا}^{\frac{9}{6}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} - \cdots\cdots + \text{ا}^{\frac{1}{6}}\,\text{ب}^{\frac{10}{4}} - \text{ب}^{\frac{11}{4}}$

۱۰- $3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} + 1$ ، ۱۱- $2^{3} - 2^{2} \times 7^{\frac{1}{4}} + 2 \times 7^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{3}{4}}$

۱۲- $5^{\frac{11}{3}} + 5^{\frac{10}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} + 5^{3} \times 3^{\frac{2}{4}} + \cdots\cdots + 5^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{10}{4}} + 3^{\frac{11}{4}}$

۱۳- $\dfrac{1 - 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}}{2}$

۱۴- $17 - 3^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{4}{4}} \times 2^{2} - 3 \times 2^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{2}{4}} \times 2^{3} - 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{7}{2}}$

۱۵- $3^{2} \times 2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{5}{3}} \times 2 + 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} - 3 \times 2^{2} + 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{3}$

۱۶- $\frac{1}{2}\left(3^{\frac{5}{6}} - 3^{\frac{4}{6}} + 3^{\frac{3}{6}} - 3^{\frac{2}{6}} + 3^{\frac{1}{6}} - 1\right)$

۱۷- $\dfrac{2^{5} + 2^{\frac{31}{6}} + 2^{\frac{26}{6}} + 2^{\frac{21}{6}} + 2^{\frac{16}{6}} + 2^{\frac{11}{6}} + 1}{31}$

۱۸- $\dfrac{3^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{6}} + 3^{\frac{1}{6}}}{8}$ ، ۱۹- $\sqrt{5} + \sqrt{7} - 2$

۲۰- $\sqrt{5} - \sqrt{7} + 2\sqrt{3}$ ، ۲۱- $1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

۲۲- $1 + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$ ، ۲۳- $2 + \sqrt{\text{ا}} - \sqrt{3\text{ب}}$

۲۴- $3 - \sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ۲۵- $1 + \sqrt{2}$

۲۶- $۲+\sqrt{۵}$ ۲۷- $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۲۸- $۳-۲\sqrt{۲}$

۲۹- $۳\sqrt{۳}-\sqrt{۶}$ ۳۰- $\frac{۱}{\sqrt{۱-ا^۲}}\left(\sqrt{\frac{۱+ا}{۲}}+\sqrt{\frac{۱-ا}{۲}}\right)$

۳۱- $\sqrt{\frac{۱+ا+ا^۲}{۲}}+\sqrt{\frac{۱-ا+ا^۲}{۲}}$ ۳۲- $۱۱+۵۶\sqrt{۳}$

۳۳- ۲۸۹ ۳۴- $۳\sqrt{۳}+۵$ ۳۵- ۳

۳۶- ۵٫۲۶۷۹۴۹۲ ۳۷- $۳+\sqrt{۵}=۵٫۲۳۶۰۷$

۳۸- $\frac{ا-۱}{۲}$ ۳۹- لا = ۲۵ ۴۰- لا = ۷

۴۱- $لا=\frac{اب}{ا+ب}$

۴۲ $لا=\frac{ا^۲+ب^۲+ج^۲-۲اب-۲بج-۲جا}{۴ج}$

# امثلہ نمبری ۸

۱- ۱۳- ۲- $۶-۲\sqrt{۶}$ ۳- $لا^۲-لا+۱$

۴- $-۱۹-۶\sqrt{۱۰}$ ۵- $\frac{۲الا\sqrt{-۱}}{ا^۲+ب^۲}$ ۶- $\frac{۳ا^۲-۱}{۲ا}$

۷- $\sqrt{-۱}$ ۸- $\pm(۵-۶\sqrt{-۱})$ ۹- $\pm۲(۱-\sqrt{-۱})$

۱۰- $\pm(ا+\sqrt{-۱})$ ۱۱- $\pm\{(ا+ب)-(ا-ب)\sqrt{-۱}\}$

۱۲- $\frac{۴}{۷}-\frac{\sqrt{۶}}{۱۴}خ$ ۱۳- خ

۱۴- $\frac{۲ب(۳ا^۲-ب^۲)}{ا^۲+ب^۲}خ$

۱۵- $-\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}خ$ ۱۶- $\frac{۶}{۵}$ ۱۷- ۸

۱۹- لا$^{4}$ - ۶ لا$^{3}$ + ۱۸ لا$^{2}$ - ۲۶ لا + ۲۱

۲۲- ۵/۳۴

# امثلہ نمبری ۹ ا

۱- ۳۵ لا$^{2}$ + ۱۳ لا - ۱۲ = ۰

۲- م ن لا$^{2}$ + (ن$^{2}$ - م$^{2}$) لا - م ن = ۰

۳- (ف$^{2}$ - ق$^{2}$) لا$^{2}$ + ۴ ف ق لا - ف$^{2}$ + ق$^{2}$ = ۰

۴- لا$^{2}$ + ۲ ف لا + ف$^{2}$ - ۸ ق = ۰

۵- لا$^{2}$ + ۶ لا + ۳۴ = ۰  ۶ لا$^{2}$ + ۲ ا لا + ا$^{2}$ + ب$^{2}$ = ۰

۷- ۲ ا لا$^{3}$ + (۴ - ا$^{2}$) لا$^{2}$ - ۲ ا لا = ۰  ۸- لا$^{3}$ - ۸ لا$^{2}$ + ۱۷ لا - ۴ = ۰

۱۳- ۳، ۵  ۱۴- (ا - ب)/(ا + ب)  ۱۶- (ب$^{2}$ - ۲ ا ج)/ج$^{2}$

۱۷- ب ج$^{4}$ (۳ ا ج - ب$^{2}$)/ا$^{4}$  ۱۸- ب$^{2}$ (ب$^{2}$ - ۴ ا ج)/ا$^{2}$ ج$^{2}$

۱۹- ۷  ۲۰- ۱۵-  ۲۱- صفر

۲۲- لا$^{2}$ - ۲ (ف$^{2}$ - ۲ ق) لا + ف$^{2}$ (ف$^{2}$ - ۴ ق) = ۰

۲۴- (۱) (ب$^{2}$ - ۲ ا ج)/ا$^{2}$ ج$^{2}$  (۲) ب (ب$^{2}$ - ۳ ا ج)/ا$^{3}$ ج$^{3}$

۲۵- ن ب$^{2}$ = (۱ + ن)$^{2}$ ا ج  ۲۶- لا$^{2}$ - ۴ م ن لا - (م$^{2}$ - ن$^{2}$)$^{2}$ = ۰

۲۷- ا$^{2}$ ج$^{2}$ لا$^{2}$ - (ب$^{2}$ - ۲ ا ج) (ا$^{2}$ + ج$^{2}$) لا + (ب$^{2}$ - ۲ ا ج)$^{2}$ = ۰

# امثلہ نمبری ۹ ب

۱- ۲ اور ۲-  ۵- ب لا$^{2}$ - ۲ ا لا + ا = ۰

۹- (۱) ف (ف$^{2}$ - ۴ ق) (ف$^{2}$ - ق)/ق  (۲) (ف$^{4}$ - ۴ ف$^{2}$ ق + ۲ ق$^{2}$)/ق$^{2}$

۱۱- ۱/۴

# امثلہ نمبری ۹ ج

۱۔ $-۲$ ۲۔ $\pm ۷$

۵۔ $(ل نَ - لَ ن)^۲ = (ل مَ - لَ م)(م نَ - مَ ن)$

۷۔ $(ا اَ - ب بَ)^۲ + ۴(ھ اَ + ھَ ب)(ھ بَ + ھَ ا) = ۰$

۱۰۔ $(ب بَ - ۲ ا جَ - ۲ اَ ج)^۲ = (ب^۲ - ۴ ا ج)(بَ^۲ - ۴ اَ جَ)$ جس کی مختصر صورت $(ا جَ - اَ ج)^۲ = (ا بَ - اَ ب)(ب جَ - بَ ج)$ ہے۔

# امثلہ نمبری ۱۰ ا

۱۔ $\frac{۱}{۴}$، $-\frac{۱}{۲}$ ۲۔ ۴، $\frac{۱}{۴}$ ۳۔ $\frac{۴}{۹}$، $\frac{۱}{۴}$

۴۔ ۱، $۲^{ن}$ ۵۔ ب، ج ۶۔ ۲، $-۱$

۷۔ $\pm \frac{۱}{۳}$، $\pm ۱$ ۸۔ ۲۷، $\frac{۲۵}{۱۴۷}$ ۹۔ $\frac{۹}{۱۳}$، $\frac{۴}{۱۳}$

۱۰۔ $\pm ۱$ ۱۱۔ $-۴$ ۱۲۔ صفر

۱۳۔ ۹، $-۷$، $۱ \pm \sqrt{-۲۴}$ ۱۴۔ ۲، $-۴$، $-۱ \pm \sqrt{۱۷}$

۱۵۔ ۳، $-\frac{۳}{۲}$، $\frac{۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۴}$ ۱۶۔ ۴، $-\frac{۷}{۲}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{۶۵}}{۴}$

۱۷۔ $-\frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۲۹}$، $-\frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۱}$

۱۸۔ ۳، $-\frac{۵}{۳}$، $\frac{۲ \pm \sqrt{۷۰}}{۳}$ ۱۹۔ ۵، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۸ \pm \sqrt{۱۴۸}}{۳}$

۲۰۔ ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۵ \pm \sqrt{۲۰۱}}{۴}$ ۲۱۔ ۵، $-\frac{۷}{۳}$، $\frac{۸ \pm \sqrt{۴۱۵}}{۶}$

۲۲۔ ۱، ۹، $-\frac{۱۸}{۵}$ ۲۳۔ ا، $\frac{ا}{۲}$، $-\frac{ا}{۳}$

۲۴- ۵، $\frac{۱}{۲}$    ۲۵- ۲، $-\frac{۹}{۲}$    ۲۶- صفر، ۵

۲۷- ۶، $-\frac{۵}{۲}$    ۲۸- ۳، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{-۱\pm\sqrt{-۳۵}}{۶}$

۲۹- $۲\pm\sqrt{۳}$، $\frac{-۱\pm\sqrt{-۳}}{۲}$    ۳۰- ۲، $-\frac{۱}{۲}$، ۵، $-\frac{۱}{۵}$

۳۱- $\frac{\{ا-ب\pm\sqrt{ب^۲-۲اب-۳ا^۲}\}}{۲ا}$، ۱-

۳۲- $\frac{-(ا+ب)\pm(ب^۲+۲اب-۳ا^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{۲ا}$، ۱

۳۳- $\frac{-ب\pm\sqrt{ب^۲-۴ا^۲}}{۲ا}$، ±۱

۳۴- $\frac{-ب\pm\sqrt{ب^۲\pm۴اج}}{۲ا}$

۳۵- $\frac{۱}{۴۸}\{-۱۳\pm\sqrt{۳۷}+۸\sqrt{-۲۰۶۲\pm۲۶\sqrt{۳۷}}\}$، $\frac{۱}{۴۸}\{-۱۳\pm\sqrt{۳۷}-\sqrt{-۲۰۶۲\pm۲۶\sqrt{۳۷}}\}$

۳۶- ±۵    ۳۷- ۳ا، -۴ا    ۳۸- $\pm\frac{۲ا}{۵}$

۳۹- $\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$، $\frac{-۱\pm\sqrt{۲}}{۲}$

۴۰- $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$    ۴۱- صفر، $\frac{۱۶۳ا}{۶۵}$

۴۲- ا، $\frac{(\sqrt{ا}-\sqrt{ب})^۲+۴}{(\sqrt{ا}+\sqrt{ب})^۲-۴}$

## امثلہ نمبری ۱۰ ب

۱- لا = ۵، $-\frac{۸}{۳}$ اور ما = ۴، $-\frac{۱۵}{۲}$

۲- لا = ۲، − ۸/۱۹ اور ما = ۷، − ۹۷/۱۹

۳- لا = ۱، − ۵۳/۸۸ اور ما = ۱، − ۲۵/۲۲

۴- لا = ± ۵، ± ۳ اور ما = ± ۳، ± ۵

۵- لا = ۸، ۲ اور ما = ۲، ۸

۶- لا = ۴۵، ۵ اور ما = ۵، ۴۵

۷- لا = ۹، ۴ اور ما = ۴، ۹

۸- لا = ± ۲، ± ۳ اور ما = ± ۱، ± ۲

۹- لا = ± ۲، ± ۳ اور ما = ± ۳، ± ۴

۱۰- لا = ± ۵، ± ۳ اور ما = ± ۳، ± ۴

۱۱- لا = ± ۲، ± ۱ اور ما = ± ۱، ± ۳

۱۲- لا = ± √۳ ± √(۳/۱۹) اور ما = ۰، ± ۶ √(۳/۱۹)

۱۳- لا = ۵، ۳، ۴ ± √(−۹۷) اور ما = ۳، ۵، ۴ ± √(−۹۷)

۱۴- لا = ۴، −۲، ± √(−۱۵) + ۱ اور ما = ۲، −۴، ± √(−۱۵) − ۱

۱۵- لا = ۴، −۲، ± √(−۱۱) + ۱ اور ما = ۲، −۴، ± √(−۱۱) − ۱

۱۶- لا = ۴/۵، ۱/۵ اور ما = ۲۰، ۵

۱۷- لا = ۲، ۱ اور ما = ۱، ۲

۱۸- لا = ۶، ۴ اور ما = ۱۰، ۱۵

۱۹- لا = ۷۲۹، ۳۴۳ اور ما = ۳۴۳، ۷۲۹

۲۰- لا = ۱۶، ۱ اور ما = ۱، ۱۶

۲۱- لا = ۹، ۴ اور ما = ۴، ۹ ۲۲- لا = ۵ اور ما = ± ۴

۲۳- لا = ۱، ۵/۳ اور ما = ۲، ۲/۳ ۲۴- لا = ۹، ۱ اور ما = ۱، ۹

۲۵- لا = ± ۲۵ اور ما = ± ۹

۲۶- لا = ۶، ۲، ۴، ۳ اور ما = ۱، ۳، $\frac{۳}{۲}$، ۲

۲۷- لا = ±۵، ±۴، ±$\frac{۵}{۲}$، ±۲ اور ما = ±۵، ±۴، ±۱۰، ±۸

۲۸- لا = ۴، $\frac{۱۰۷}{۱۳}$ اور ما = ۱، $\frac{۴۸}{۱۳}$

۲۹- لا = −۶، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۱۴۳}}{۲}$ اور ما = −۳، $\frac{۱ \pm ۳\sqrt{-۱۴۳}}{۴}$

۳۰- لا = ۰، ۹، ۳ اور ما = ۰، ۳، ۹

۳۱- لا = ۰، ۱، $\frac{۱۵}{۲۲}$ اور ما = ۰، ۲، $\frac{۹}{۲۲}$

۳۲- لا = ۵، ۰، $\frac{۱۰}{۲۳}$ اور ما = ۳، −$\frac{۶}{۲۳}$، −$\frac{۳}{۷}$

۳۳- لا = ۲، $\sqrt[۳]{۴}$، ۲ اور ما = ۲، ۲$\sqrt[۳]{۴}$، ۶

۳۴- لا = ۱، $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$ اور ما = ۲، ۳$\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$

۳۵- لا = ±۳، ±$\sqrt{-۱۸}$ اور ما = ±۳، ±$\sqrt{-۱۸}$

۳۶- لا = ما = ±۱

۳۷- لا = ۰، $\frac{ب\sqrt{ا}}{\sqrt{ا}+\sqrt{ب}}$، $\frac{ب\sqrt{ا}}{\sqrt{ا}-\sqrt{ب}}$

اور ما = ۰، $\frac{ا\sqrt{ب}}{\sqrt{ا}+\sqrt{ب}}$، −$\frac{ا\sqrt{ب}}{\sqrt{ا}-\sqrt{ب}}$

۳۸- لا = ب، $\frac{ب(-۱ \pm \sqrt{۳})}{۲}$ اور ما = ا، ا$(۱ + \sqrt{۳})$

۳۹- لا = ا۲/ب ، ا(۲ب-ا)/ب اور ما = ب۲/ا ، ب(۲ا-ب)/ا

۴۰- لا = ۰، ±ا√۷ ، ±ا√۱۳ ، ±۳ا ، ±ا

اور ما = ۰، ±ب√۷ ، ±ب√۱۳ ، ±ب ، ±۳ب

۴۱- لا = ±۱، ± ۲ا۲/√(۱۶ا۴-ا۲-۱)

اور ما = ±۲ا، ± ا/√(۱۶ا۴-ا۲-۱)

## امثلہ نمبری ۱۰ج

۱- لا = ±۳، ما = ±۵، ی = ±۴

۲- لا = ۵، ما = -۱، ی = ۷

۳- لا = ۵، -۱ اور ما = ۱، -۵ اور ی = ۲

۴- لا = ۸، -۳ اور ما = ۳ اور ی = ۳، -۸

۵- لا = ۴، ۳، (۲±√۱۵۱)/۳ اور ما = ۳، ۴، (۲±√۱۵۱)/۳

اور ی = ۲، -۱۱/۳

۶- لا = ±۳، ما = ±۲، ی = ±۵

۷- لا = ±۵، ما = ±۱، ی = ±۱

۸- لا = ۸، -۸ اور ما = ۵، -۵ اور ی = ۳، -۳

۹- لا = ۳، ما = ۴، ی = ۱/۲، و = ۱/۴

۱۰- لا = ۱، ما = ۲، ی = ۳

۱۱- لا = ۵، -۷ اور ما = ۳، -۵ اور ی = ۶، -۸

۱۲- لا = ۱، -۲ اور ما = ۷، -۳ اور ی = ۳، -۱۱/۳

۱۳- لا = ۴، ۶۰/۷ اور ما = ۶، ۴۶/۷ اور ی = ۲، -۶

۱۴- لا = ا، صفر، صفر اور ما = صفر، ا، صفر اور ی = صفر، صفر، ا

۱۵- لا = $\frac{ا}{\sqrt{۳}}$ ، $-\frac{\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۹}}{۶}$ ا

ما = $\frac{ا}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{-۵\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۹}}{۶}$ ا

ی = $\frac{ا}{\sqrt{۳}}$ ، $-\frac{\sqrt{۳} \pm \sqrt{-۹}}{۳}$ ا

۱۶- لا = ا، −۲ا، $\frac{۷ \pm \sqrt{-۱۵}}{۲}$ ا

ما = ۴ا، ا، $\frac{-۱۱ \pm \sqrt{-۱۵}}{۲}$ ا

ی = ۲ا، −۴ا، $(۱ \pm \sqrt{-۱۵})$ ا

## امثلہ نمبری ۱۱ ا

| | | |
|---|---|---|
| ۱- ۲۴ | ۲- ۶، ۶ | ۳- ۷ |
| ۴- ن - ر + ۱ | ۵- ۱۸ | ۷- ۱۲ |
| ۸- ۴۰۳۲۰، ۶۳۷۵۶۰۰، ۱۰۶۲۶، ۱۱۶۲۸ | | |
| ۹- ۱۵ | ۱۰- ۵۰۴۰، ۱۲۰ | ۱۱- ۱۵، ۳۶۰ |
| ۱۲- ۶ | ۱۳- ۱۲۰ | ۱۴- ۷۲۰ |
| ۱۵- ۱۰۶۲۶، ۱۷۷۱ | ۱۶- ۱۴۴۰ | ۱۷- ۶۳۷۵۶۰۰ |
| ۱۸- ۳۶۰، ۱۴۴ | ۱۹- ۲۳۰۳۰۰ | ۲۰- ۱۱۴۰، ۲۳۱ |
| ۲۱- ۱۴۴ | ۲۲- ۲۲۴، ۸۹۲ | ۲۳- ۸۴۸ |
| ۲۴- ۵۶ | ۲۵- ۲۱۰ | ۲۶- ۳۰۰ |
| ۲۷- ۳۶۰۰۰۰ | ۲۸- ۲۰۵۲۰۰۰ | ۲۹- ۳۶۹۶۰۰ |
| ۳۰- ۲۱۶۰۰ | ۳۱- $\frac{۴۵!}{۱۰!\ ۱۵!\ ۲۰!}$ | ۳۲- ۵۷۶۰ |

۳۳- ۲۹۰۳۰۴۰ ۳۴- ۲۵۹۲۰ ۳۶- ۴۱

۳۷- ۱۹۵۶ ۳۸- ۷ ۳۹- ۴۸۰

# امثلہ نمبری ۱۱ ب

۳- ۲۵۵ ۴- ۲۸

۵- (۱) ۹۰۷۲۰۰ (۲) ۱۰۰۸۰ (۳) ۳۰۲۴۰

۶- ۱۵۱۳۵۱۲۰۰ ۷- ۳۶۰ ۸- $\text{ف}^{\text{ن}}$

۹- ۳۰ ۱۰- (۱) ۱۲۶۰ (۲) ۲۷۷۲۰

۱۱- ۳۳۷۴ ۱۲- ۴۵۵

۱۳- $\frac{\underline{|\text{ا}+۲\text{ب}+۳\text{ج}+\text{د}}}{\underline{|\text{ا}}\,(\underline{|\text{ب}})^{۲}\,(\underline{|\text{ج}})^{۳}}$ ۱۴- ۴۰۹۵

۱۵- ۵۷۷۶۰۰۰ ۱۶- ۷۲۰، ۳۶۲۸۸۰۰

۱۷- ۳۶۰ ۱۸- ۴ ۱۹- ۱۲۷

۲۰- ۳۱۵ ۲۱- $\frac{\underline{|\text{م ن}}}{(\underline{|\text{م}})^{\text{ن}}\,\underline{|\text{ن}}}$

۲۲- ۴۴، ۳۲۵ ۲۳- ۴۲ ۲۴- $\frac{۱}{۲}(\text{ن}^{۲}+\text{ن}+۲)$

۲۵- (۱) $\frac{\text{ف}(\text{ف}-۱)}{۲} - \frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)}{۲}+۱$

(۲) $\frac{\text{ف}(\text{ف}-۱)(\text{ف}-۲)}{۶} - \frac{\text{ق}(\text{ق}-۱)(\text{ق}-۲)}{۶}$

۲۶- $(\text{ف}+۱)^{\text{ن}}-۱$ ۲۷- ۱۱۳، ۲۱۹۰ ۲۸- ۲۴۵۴

۲۹- ۶۶۶۶۶۰۰ ۳۰- ۵۱۹۹۹۶۰

# امثلہ نمبری ۱۳ و

۱۔ $\text{لا}^{۵} - ۱۵\text{لا}^{۴} + ۹۰\text{لا}^{۳} - ۲۷۰\text{لا}^{۲} + ۴۰۵\text{لا} - ۲۴۳$

۲۔ $۸۱\text{لا}^{۴} + ۲۱۶\text{لا}^{۳}\text{ا} + ۲۱۶\text{لا}^{۲}\text{ا}^{۲} + ۹۶\text{لا}\text{ا}^{۳} + ۱۶\text{ا}^{۴}$

۳۔ $۳۲\text{لا}^{۵} - ۸۰\text{لا}^{۴}\text{ا} + ۸۰\text{لا}^{۳}\text{ا}^{۲} - ۴۰\text{لا}^{۲}\text{ا}^{۳} + ۱۰\text{لا}\text{ا}^{۴} - \text{ا}^{۵}$

۴۔ $۱ - ۱۸\text{ی}^{۲} + ۱۳۵\text{ی}^{۴} - ۵۴۰\text{ی}^{۶} + ۱۲۱۵\text{ی}^{۸} - ۱۴۵۸\text{ی}^{۱۰} + ۷۲۹\text{ی}^{۱۲}$

۵۔ $\text{لا}^{۱۰} + ۵\text{لا}^{۹} + ۱۰\text{لا}^{۸} + ۱۰\text{لا}^{۷} + ۵\text{لا}^{۶} + \text{لا}^{۵}$

۶۔ $۱ - ۷\text{لا}\text{ا} + ۲۱\text{لا}^{۲}\text{ا}^{۲} - ۳۵\text{لا}^{۳}\text{ا}^{۳} + ۳۵\text{لا}^{۴}\text{ا}^{۴} - ۲۱\text{لا}^{۵}\text{ا}^{۵} + ۷\text{لا}^{۶}\text{ا}^{۶} - \text{لا}^{۷}\text{ا}^{۷}$

۷۔ $۱۶ - ۴۸\text{لا} + ۵۴\text{لا}^{۲} - ۲۷\text{لا}^{۳} + \frac{۸۱\text{لا}^{۴}}{۱۶}$

۸۔ $۷۲۹\text{ی}^{۶} - ۹۷۲\text{ی}^{۵} + ۵۴۰\text{ی}^{۴} - ۱۶۰\text{ی}^{۳} + \frac{۸۰\text{ی}^{۲}}{۳} - \frac{۶۴\text{ی}}{۲۷} + \frac{۶۴}{۷۲۹}$

۹۔ $۱ + \frac{۷\text{لا}}{۲} + \frac{۲۱\text{لا}^{۲}}{۴} + \frac{۳۵\text{لا}^{۳}}{۸} + \frac{۳۵\text{لا}^{۴}}{۱۶} + \frac{۲۱\text{لا}^{۵}}{۳۲} + \frac{۷\text{لا}^{۶}}{۶۴} + \frac{\text{لا}^{۷}}{۱۲۸}$

۱۰۔ $\frac{۶۴\text{لا}^{۶}}{۷۲۹} - \frac{۳۲\text{لا}^{۴}}{۲۷} + \frac{۲۰\text{لا}^{۲}}{۳} - ۲۰ + \frac{۱۳۵}{۴\text{لا}^{۲}} - \frac{۲۴۳}{۸\text{لا}^{۴}} + \frac{۷۲۹}{۶۴\text{لا}^{۶}}$

۱۱۔ $\frac{۱}{۲۵۶} + \frac{\text{ی}}{۱۶} + \frac{۷\text{ی}^{۲}}{۱۶} + \frac{۷\text{ی}^{۳}}{۴} + \frac{۳۵\text{ی}^{۴}}{۸} + ۷\text{ی}^{۵} + ۷\text{ی}^{۶} + ۴\text{ی}^{۷} + \text{ی}^{۸}$

۱۲۔ $۱ - \frac{۱۰}{\text{لا}} + \frac{۴۵}{\text{لا}^{۲}} - \frac{۱۲۰}{\text{لا}^{۳}} + \frac{۲۱۰}{\text{لا}^{۴}} - \frac{۲۵۲}{\text{لا}^{۵}} + \frac{۲۱۰}{\text{لا}^{۶}} - \frac{۱۲۰}{\text{لا}^{۷}} + \frac{۴۵}{\text{لا}^{۸}} - \frac{۱۰}{\text{لا}^{۹}} + \frac{۱}{\text{لا}^{۱۰}}$

۱۴۔ $-۳۵۷۵۰\text{لا}^{۱۰}$ ۱۵۔ $-۱۱۲۶۴۰\text{لا}^{۹}$

۱۶۔ $-۳۱۲\text{لا}^{۲}$ ۱۷۔ $\frac{\underline{|۳۰}}{\underline{|۳}\cdot\underline{|۲۷}}(۵\text{لا})^{۳}(۸\text{ا})^{۲۷}$

۱۸۔ $۴۰\text{ی}^{۷}\text{ب}^{۳}$ ۱۹۔ $\frac{۱۱۲۰}{۸۱}\text{ی}^{۴}\text{ب}^{۴}$

۲۰- $\frac{۱۰۵۰۰}{لا^{۳}}$ ۲۱- $\frac{۷۰ لا^{۶} ا^{۱۰}}{ر^{۲} ب^{۶}}$

۲۲- $۲ لا^{۴} + ۲۴ لا^{۲} + ۸$

۲۳- $۲ لا (۱۶ لا^{۴} - ۲۰ لا^{۲} ر^{۲} + ۵ ر^{۴})$ ۲۴ $۱۴۰ \sqrt{۲}$

۲۵- $۲ (۳۶۵ - ۳۶۳ لا + ۶۳ لا^{۲} - لا^{۳})$۔

۲۶- ۲۵۲ ۲۷- $-\frac{۴۲۹}{۱۶} لا^{۱۴}$

۲۸- $\frac{۱۸۹}{۸} ر^{۱۷}$، $-\frac{۲۱}{۱۶} ر^{۱۹}$

۲۹- $۱۱.۵۶۵ ر^{۴}$ ۳۰- $۸۴ ر^{۳} ب^{۶}$

۳۱- ۱۳۶۵، -۱۳۶۵ ۳۲- ۱۸۵۶۴

۳۳- $\frac{۷}{۱۸}$ ۳۴- $\frac{|\underline{ن}}{|\underline{\frac{۱}{۲}(ن-ر)}\;|\underline{\frac{۱}{۲}(ن+ر)}}$

۳۵- $(-۱)^{ن} \frac{|\underline{۳ن}}{|\underline{ن}\;|\underline{۲ن}}$

## امثلہ نمبری ۱۳ ب

۱- -۱۳۴ ۲- -۶ ۳- -۳۹۲

۴- ۵۸۴ ۶- ۱۵۱۰ ۷- ۱۵۰۰۶

۸- ۱۵۰۱۲۰۶ ۹- ۱۵۰۰۳۵۰۵ ۱۰- بارھویں

۱۱- چھٹی ۱۲- دسویں اور گیارھویں

۱۳- تیسری رقم = $۶\frac{۲}{۳}$ ۱۴- چوتھی اور پانچویں رقمیں = $\frac{۷}{۱۴۴}$

۱۷- لا = ۲، ا = ۳، ن = ۵

۱۸- $۱ + ۸ لا + ۲۰ لا^{۲} + ۸ لا^{۳} - ۲۶ لا^{۴} - ۸ لا^{۵} + ۲۰ لا^{۶} - ۸ لا^{۷} + لا^{۸}$

۱۹- $\text{۲۷ لا}^{۶} - \text{۵۴ ا لا}^{۵} + \text{۱۱۷ ا}^{۲}\text{لا}^{۴} - \text{۱۱۶ ا}^{۳}\text{لا}^{۳} + \text{۱۱۷ ا}^{۴}\text{لا}^{۲} - \text{۵۴ ا}^{۵}\text{لا} + \text{۲۷ ا}^{۶}$

۲۰- $\dfrac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ر}-\text{۱}\;\lfloor\text{ن}-\text{ر}+\text{۱}} \times \text{لا}^{\text{ر}-\text{۱}}\,\text{ا}^{\text{ن}-\text{ر}+\text{۱}}$

۲۱- $(-\text{۱})^{\text{ع}} \dfrac{\lfloor\text{۲ن}+\text{۱}}{\lfloor\text{ع}+\text{۱}\;\lfloor\text{۲ن}-\text{ع}} \text{لا}^{\text{۲ع}-\text{۲ن}+\text{۱}}$

۲۲- ۱۴     ۲۳- $\text{ر} = \text{۲ن}$     ۲۵- $\text{۵}^{\text{ن}}$

۲۶- ۱

۳۶- $\dfrac{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ن}} + (\text{۱}-\text{لا})^{\text{ن}}}{\text{۲}}$     ۳۷- $\left(\dfrac{\text{۱}+\text{۲لا}}{\text{۱}+\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$

# امثلہ نمبری ۱۴ ا

۶- مستدق     ۷- مستدق

۸- اگر $|\text{لا}| < \text{۱}$ تو مستدق، اگر $|\text{لا}| \geq \text{۱}$ تو غیر مستدق

۹- مستدق

۱۰- اگر $|\text{لا}| < \text{۱}$ یا $\text{لا} = \text{۱}$ تو مستدق، اگر $|\text{لا}| > \text{۱}$ تو غیر مستدق

# امثلہ نمبری ۱۴ ب

۱- $\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}\text{لا}^{\text{۳}}$     ۲- $\text{۱} + \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\text{لا} + \frac{\text{۳}}{\text{۸}}\text{لا}^{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}\text{لا}^{\text{۳}}$

۳- $\text{۱} - \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\text{لا} - \frac{\text{۳}}{\text{۲۵}}\text{لا}^{\text{۲}} - \frac{\text{۸}}{\text{۱۲۵}}\text{لا}^{\text{۳}}$     ۴- $\text{۱} - \text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا}^{\text{۴}} - \text{۴لا}^{\text{۶}}$

۵- $\text{۱} - \text{لا} - \text{لا}^{\text{۲}} - \frac{\text{۵}}{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}}$     ۶- $\text{۱} + \text{لا} + \text{۲لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱۴}}{\text{۳}}\text{لا}^{\text{۳}}$

۷- $۱ - \text{لا} + \frac{۳}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۵}{۲}\text{لا}^{۳}$ ۸- $۱ - \text{لا} + \frac{۲}{۳}\text{لا}^{۲} - \frac{۱۰}{۲۷}\text{لا}^{۳}$

۹- $۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۶} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۵۴}$ ۱۰- $۱ - ۲\text{ر} + \frac{۵}{۲}\text{ر}^{۲} - \frac{۵}{۲}\text{ر}^{۳}$

۱۱- $\frac{۱}{۸}(۱ - \frac{۳}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۵}{۴}\text{لا}^{۳})$

۱۲- $۳(۱ + \frac{\text{لا}}{۹} - \frac{۱}{۱۶۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۱۴۵۸}\text{لا}^{۳})$

۱۳- $۴(۱ + \text{ر} - \frac{۱}{۴}\text{ر}^{۲} + \frac{۱}{۶}\text{ر}^{۳})$

۱۴- $\frac{۱}{۲۷}(۱ + \text{لا} + \frac{۵}{۶}\text{لا}^{۲} + \frac{۳۵}{۵۴}\text{لا}^{۳})$

۱۵- $\frac{۱}{۳\,\text{ر}^{\frac{۲}{۳}}}(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{۳}{۲} \times \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} + \frac{۵}{۲} \times \frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ر}^{۳}})$

۱۶- $-\frac{۴۲۹}{۱۶}\text{لا}^{۴}$ ۱۷- $\frac{۷۷}{۲۵۶}\text{لا}^{۳}$

۱۸- $-\frac{۱۰۴۰}{۸۱}\text{ر}^{۱۸}$ ۱۹- $\frac{۱۶\,\text{ب}^{۴}}{۲۴۳\,\text{ر}^{۵}}$

۲۰- $(\text{ر}+۱)\,\text{لا}^{\text{ر}}$ ۲۱- $\frac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)(\text{ر}+۳)}{۱\times۲\times۳}\text{لا}^{\text{ر}}$

۲۲- $(-۱)^{\text{ر}-۱}\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\cdots(۲\text{ر}-۳)}{۲^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\text{لا}^{\text{ر}}$

۲۳- $(-۱)^{\text{ر}-۴}\frac{۱۱\times۸\times۵\times۲\times۱\times۴\times\cdots\cdots(۳\text{ر}-۱۴)}{۳^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\text{لا}^{\text{ر}}$

۲۴- $-۱۸۴۸\,\text{لا}^{۱۳}$ ۲۵- $-\frac{۱۹۷۱۲}{۳}\text{لا}^{۶}$

۲۷- $۴\text{ر}+۱$ ۲۸- $(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۳)$

۲۹- چوتھی ۳۰- تمام سوائے دو کے

۳۱- $\frac{۱}{۵\text{لا}}\left(۱-\frac{۱}{۵\text{لا}}+\frac{۱}{۲۵\text{لا}^{۲}}-\dots\dots\right)$

# امثلہ نمبری ۱۴ج

۱- $(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{۱\times۳\times۵\times۷\times\dots\dots(۲\text{ر}-۱)}{۲^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۲- $\frac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)(\text{ر}+۳)(\text{ر}+۴)}{\underline{|۴}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۳- $(-۱)^{\text{ر}-۱}\,\frac{۱\times۲\times۵\times\dots\dots(۳\text{ر}-۴)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۴- $(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{۲\times۵\times۸\times\dots\dots(۳\text{ر}-۱)}{۳^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۵- $(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{۲\text{ر}}$

۶- $\frac{۳\times۵\times۷\times\dots\dots(۲\text{ر}+۱)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۷- $(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{\text{ب}^{\text{ر}}}{\text{و}^{\text{ر}+۱}}\times\text{لا}^{\text{ر}}$ ۸- $\frac{\text{ر}+۱}{۲^{\text{ر}+۲}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۹- $-\frac{۲\times۱\times۴\times\dots\dots(۳\text{ر}-۵)}{۳^{\text{ر}}\,\underline{|\text{ر}}}\times\frac{\text{لا}^{۳\text{ر}}}{\text{و}^{۳\text{ر}-۲}}$

۱۰- $(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{۱\times۳\times۵\times\dots\dots(۲\text{ر}-۱)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۱۱- $\frac{۲\times۵\times۸\times\dots\dots(۳\text{ر}-۱)}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$

۱۲۔ $\frac{(ن+۱)(۲ن+۱)\ldots\ldots(\overline{ر-۱}\times ن+۱)}{|ر} \times \frac{لا^{ر}}{ان^{ر}+۱}$

۱۳۔ تیسری ۱۴۔ پانچویں ۱۵۔ تیرھویں

۱۶۔ ساتویں ۱۷۔ چوتھی اور پانچویں ۱۸۔ تیسری

۱۹۔ ۹٫۸۹۹۴۹ ۲۰۔ ۹٫۹۹۳۳۳

۲۱۔ ۱۰٫۰۰۹۹۹ ۲۲۔ ۶٫۹۹۹۲۷

۲۳۔ ٫۱۹۸۴۲ ۲۴۔ ۱٫۰۰۱۳۳

۲۵۔ ٫۰۰۷۹۵ ۲۶۔ ۵٫۰۰۰۹۶

۲۷۔ $۱ - \frac{۲۳}{۹} لا$ ۲۸۔ $\frac{۲}{۳}(۱ + \frac{لا}{۲۴})$

۲۹۔ $۱ - \frac{۵ لا}{۸}$ ۳۰۔ $\frac{۱}{۴} - \frac{۵}{۹} لا$

۳۱۔ $۱ - \frac{۳۴۳}{۱۲۰} لا$ ۳۲۔ $\frac{۱}{۳} - \frac{۷۱}{۳۶۰} لا$

۳۵۔ $۱ - ۴ لا + ۱۳ لا^{۲}$ ۳۶۔ $۲ + \frac{۲۹}{۴} لا + \frac{۲۹۷}{۳۲} لا^{۲}$

## امثلہ نمبری ۱۴و

۱۔ ۱۹۷− ۲۔ ۱۴۲ ۳۔ $(-۱)^{ن-۱}$

۴۔ $(-۱)^{ن}(ن^{۲} + ۲ن + ۲)$ ۶۔ $\sqrt{۸} = (۱ - \frac{۱}{۲})^{-\frac{۳}{۲}}$

۷۔ $(۱ - \frac{۲}{۳})^{-ن} = ۲^{ن}(۱ - \frac{۱}{۳})^{-ن}$ ۱۲۔ $\frac{|۲ن}{|ن \; |ن}$

۱۴۔ $(۱ - لا^{۳}) - (۱ - لا)^{۳} = ۳ لا - ۳ لا^{۲}$ کی مدد سے دیا ہوا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۱۶- (۱) ۴۵ (۲) ۶۵۶۱

۱۸- (۱) $(۱+لا)^{ن}(۱+لا)^{-۱} = (۱+لا)^{ن-۱}$ میں لا کے سروں کو مساوی رکھو

(۲) $(۱+لا)^{ن}(۱+\frac{۱}{لا})^{-۲} = لا^{۲}(۱+لا)^{ن-۲}$ میں مطلق رقموں کو مساوی رکھو

۲۰- دائیں طرف کا سلسلہ $+(-۱)^{ن} ق_{ن}^{۲} = لا^{۲ن}$ کا سر جملہ $(۱-لا^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ میں

۲۱- $۲^{۲ن-۱} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\underline{|۲ن}}{\underline{|ن}\ \underline{|ن}}$

[(ج + ج۱ + ج۲ +...... + جن)$^{۲}$ - ۲(ج ج۱ + ج۱ ج۲ +........)

= ج$^{۲}$ + ج۱$^{۲}$ + ج۲$^{۲}$ +...... + جن$^{۲}$ کو استعمال کرو]

# امثلہ نمبری ۱۵

۱- ۱۲۶۰۰-  ۲- ۱۶۸-  ۳- ۳۳۶۰

۴- ۱۲۶۰- $ا^{۲} ب^{۳} ج^{۴}$  ۵- ۹-

۶- ۸۰۸۵  ۷- ۳۰  ۸- ۱۹۰۵

۹- ۱۰-  ۱۰- $-\frac{۳}{۲}$  ۱۱- ۱-

۱۲- $-\frac{۴}{۸۱}$  ۱۳- $\frac{۵۹}{۱۶}$  ۱۴- ۱-

۱۵- $\frac{۲۱۱}{۳}$  ۱۶- $۱ - \frac{۱}{۲} لا - \frac{۷}{۸} لا^{۲}$

۱۷- $۱ - ۲ لا^{۲} + ۴ لا^{۳} + ۵ لا^{۴} - ۲۰ لا^{۵}$

۱۸- ۱۶ $(۱ - \frac{۳}{۲} لا^{۲} + ۳ لا^{۳} + \frac{۹}{۳۲} لا^{۴} - \frac{۹}{۸} لا^{۵} + \frac{۹}{۸} لا^{۶})$

# امثلہ نمبری ۱۶ ا

۱- ۸، ۹　　۲- ۲، -۱　　۳- -۱۶/۳، -۱/۲

۴- -۴، ۳/۲　　۵- -۴/۳، ۴/۵　　۶- ۲/۵، -۱/۲، -۵/۲

۷- ۷/۲، -۳، -۴/۳، ۲/۳　　۸- ۶ لوک ا + ۹ لوک ب

۹- ۲/۳ لوک ا + ۳/۲ لوک ب　　۱۰- -۴/۹ لوک ا + ۱/۳ لوک ب

۱۱- -۳/۴ لوک ا - ۱/۲ لوک ب　　۱۲- -۷/۱۲ لوک ا - لوک ب

۱۳- ۱/۲ لوک ا　　۱۴- -۵ لوک ج　　۱۶- لوک ۲

۱۸- لوک ج / (لوک ا - لوک ب)　　۱۹- ۵ لوک ج / (۲ لوک ا + ۳ لوک ب)

۲۰- (لوک ا + لوک ب) / (۲ لوک ج - لوک ا + لوک ب)

۲۱- لا = ۴ لوک م / لوک ا ، ما = - لوک م / لوک ب

۲۲- لوک لا = ۱/۵ (ا + ۳ ب)، لوک ما = ۱/۵ (ا - ۲ ب)

۲۴- لوک (ا - ب) / لوک (ا + ب)

# امثلہ نمبری ۱۶ ب

۱- ۴، ۱، ۲، ۲̅، ۱̅، ۱̅، ۱̅

۲- ٫۸۸۲۱۲۵۹، ۲٫۸۸۲۱۲۵۹، ۳̅٫۸۸۲۱۲۵۹

۵٫۸۸۲۱۲۵۹، ۶̅٫۸۸۲۱۲۵۹

۳- ۵، ۲، ۴، ۱

۴- اعشاریہ کا دوسرا مقام، اکائی کا مقام، اعشاریہ کا پانچواں مقام

۵- ۱٫۸۰۶۱۸۰۰ ۶- ۱٫۹۲۴۲۷۹۳

۷- ۱̅٫۱۰۷۲۱۰۰ ۸- ۲̅٫۰۹۶۹۱۰۰

۹- ۱٫۱۵۸۳۶۲۶ ۱۰- ٫۶۶۹۰۰۶۷

۱۱- ٫۳۵۹۷۲۷۱ ۱۲- ٫۰۵۶۳۵۲۰

۱۳- ۱̅٫۵۰۵۲۹۷۳ ۱۴- ٫۴۴۰۹۲۳۸۸

۱۵- ۱٫۹۴۸۴۴۵ ۱۶- ۱۹۱۵۶۳٫۱

۱۷- ۱٫۱۹۹۸۶۹۲ ۱۸- ۱٫۰۰۳۹۲۳۸

۱۹- ۹٫۰۷۶۲۲۶ ۲۰- ۱۷۸٫۱۴۱۵۱۶

۲۱- ۹ ۲۳- ۳۰۱

۲۴- ۳٫۴۶ ۲۵- ۴٫۲۹

۲۶- ۱٫۲۰۶ ۲۷- ۱۴٫۲۰۶

۲۸- ۴٫۵۶۲

۲۹- لا = لوک ۳ ÷ (لوک ۳ - لوک ۲)، ما = لوک ۲ ÷ (لوک ۳ - لوک ۲)

۳۰- لا = (۳ لوک ۳ - ۲ لوک ۲) ÷ ۴ (لوک ۳ - لوک ۲)، ما = لوک ۳ ÷ ۴ (لوک ۳ - لوک ۲)

۳۱- ۱٫۶۴۶۰۱

۳۲- لوک ۲ ÷ ۲ لوک ۷ = ٫۱۷۸۱، ۲ لوک ۷ ÷ لوک ۲ = ۵٫۶۱۴

## امثلہ نمبری ۱۷

۲- لوک ج ۲ ۳- لوک و ۳ - لوک و ۲

۷— ء۰۰۲۰۰۰۰۰۰۶۶۶۶۶۷۰ ۔ ۱۰— $و_{لا}^{۲} - و_{ما}^{۲}$

۱۱— ء۸۴۵۰۹۸۰، ۱ء۰۴۱۳۹۲۷، ۱ء۱۱۳۹۴۳۴

۱۳— $(-۱)^{ر-۱} \times \frac{۲^{ر} + ۱}{ر} لا^{ر}$ ۔ ۱۴— $\frac{(-۱)^{ر-۱} (۳^{ر} + ۲^{ر})}{ر} لا^{ر}$

۱۵— $۲ \left\{ ۱ + \frac{(۲لا)^{۲}}{|۲} + \frac{(۲لا)^{۴}}{|۴} + \ldots\ldots + \frac{(۲لا)^{۲ر}}{|۲ر} + \ldots\ldots \right.$

۱۶— $۱ - \frac{لا^{۲}}{|۲} + \frac{لا^{۴}}{|۴} - \frac{لا^{۶}}{|۶} + \ldots\ldots + (-۱)^{ر} \frac{لا^{۲ر}}{|۲ر} + \ldots\ldots$

۲۳— $\frac{لا}{۱ - لا} + لوک_{و} (۱ - لا)$

۲۹— ء۶۹۳۱۴۷۱۸، ۱ء۰۹۸۶۱۲۲۹، ۱ء۶۰۹۴۳۷۹۲

$ا = - لوک_{و} (۱ - \frac{۱}{۱۰}) =$ ء۱۰۵۳۶۰۵۱۶

$ب = - لوک_{و} (۱ - \frac{۴}{۱۰۰}) =$ ء۰۴۰۸۲۱۹۹۵

$ج = لوک_{و} (۱ + \frac{۱}{۸۰}) =$ ء۰۱۲۴۲۲۵۲۰

تمت

## J

Joint variation تغیر مشترك

Jupiter مشتری

## L

Limit انتہا

Linear (permutations) خطّی ( ترتیبیں )

Logarithm لوکارتم

Logarithmic series لوکارتمی سلسلہ

Logarithmic Tables لوکارتمی جدولیں

Logarithmic base لوکارتمی اساس

## M

Mantissa اعشاریہ لوکارتمی

Mass مقدار مادہ

Middle term درمیانی رقم

Multinominal theorem مسئلۂ کثیر الارقام

Multiple ضِعف

Multiplying factor ضارب جزوِ ضربی

## N

Natural logarithm طبعی لوکارتم

Natural numbers طبعی اعداد

Negative منفی

N-factorial ضربی ن

Non-convergent (series) غیر مستدق ( سلسلہ )

Notation ترقیم

Ninth power نویں قوت

Ninth root نواں جذر

Numerator شمار کنندہ

Numerically تعداداً

## O

Odd طاق

Ordinate معیّن

## F

Factor جزوِ ضربی
Finite series متناہی سلسلہ
Formula ضابطہ
Fractions کسور
Fractional کسری
Function (of X) تفاعل (لا کا)

## G

Gas گیس
General Form صورت عامہ
Geometrical ہندسیہ
Geometrical progression سلسلۂ ہندسیہ
Geometric mean ہندسی اوسط
Geometry علم ہندسہ

## H

Harmonic mean موسیقی اوسط
Harmonic progression سلسلۂ موسیقیہ
Height ارتفاع
Homogeneous (expression) متجانس (جملہ)
Hyperbola قطع زائد
Hypothesis مفروضہ

## I

Identity مساوات متماثلہ
Imaginary quantities مقادیر خیالی
Incommensurable (numbers) متبائن (اعداد)
Independent (variable) متبوع (متغیر)
Index قوت نما
Induction استقراء
Inequality لا تساوی
Infinite لا انتہا
Inifinite series لامتناہی سلسلہ
Integer صحیح عدد
Intensity (of light) اشتداد (روشنی کی)
Inverse variation تغیر معکوس
Invertendo (ratio) عکس (نسبت)

Composite number عدد مرکب
Compounding (of ratios) تالیف (نسبتوں کی)
Compound Surd مرکب اصم
Concrete (quantities) مقرون (مقادیر)
Conjugate زوج یا مزدوج
Consecutive terms ارقام متصلہ
Consequent (ratio) موخر (نسبت)
Constant (quantity) مستقل (مقدار)
Continued proportion تناسب مسلسل
Convergence استدقاق
Convergent series مستدق سلسلہ
Corresponding values متناظر قیمتیں
Co-ordinate محدّد
Cross Multiplication ضرب چلیپائی
Cross section تراش عمودی
Cube مکعب
Cube root جذر الکعب

## D

Denominator نسب نما
Dependent (variable) تابع (متغیر)
Descending powers نزولی قوتیں (گھٹتی ہوئی قوتیں)
Determinants مقطعات
Digits ہندسے
Dimensions ابعاد
Direct variation تغیر مستقیم
Dissimilar (things) غیر متشابہ (اشیاء)
Dividendo تفصیلِ نسبت
Duplicate (ratio) دہری نسبت (نسبت)

## E

Elastic string لچکدار رسّی
Electric current برقی رَو
Eliminant حاصل اسقاط
Eliminate ساقط کرنا
Elimination اسقاط
Equation مساوات
Equilateral triangle مثلث مساوی الاضلاع
Equimultiples اضعاف متساویہ
Expand پھیلاؤ
Expansion صورت تفصیلی یا تفصیل
Exponential Theorem مسئلۂ قوت نما
Expression جملہ
Extremes طرفین
Even جفت

# اصطلاحات جبر و مقابلہ

## ( حصۂ اول )

# Algebrical Terms

## A

| | | | |
|---|---|---|---|
| Abscissa | فصلہ | Antilogarithms | عکس لوکارتم |
| Absolute term | رقم مطلق | Approximation | تقرب |
| Algebra | جبر و مقابلہ | Arithmetical progression | سلسلۂ حسابیہ |
| Alternando (ratio) | تبدیل ( نسبت ) | Arithmetic mean | اوسط حسابی |
| Antecedent (ratio) | مقدم ( نسبت ) | | |

## B

| | | | |
|---|---|---|---|
| Base (triangle) | قاعدہ ( مثلث ) | Binomial Theorem | مسئلۂ ثنائی |
| Base (logarithm) | اساس ( لوکارتم ) | | |

## C

| | | | |
|---|---|---|---|
| Characteristic | ممیز | Common difference | فرق مشترک |
| Circular Cone | مخروط مستدیر | Common ratio | نسبت مشترک |
| Circular permutations | مدوّر ترتیبیں | Common logarithm | مروج یا عشری لوکارتم |
| Coefficient | سر | Complementary (Combination) | متمم ( اجتماع ) |
| Combination | اجتماع | Componendo (ratio) | ترکیب ( نسبت ) |
| Commensurable (numbers) | متوافق ( اعداد ) | | |

# صحت نامہ

## جبر و مقابلہ ۔ حصۂ اول

(طبع چہارم)

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۱۴ | ۱۸ | = ر۳ / ۲ ب | = ر۳ / ۳ ب |
| ۶۵ | ۲۱ | = ۴/۱۰ + ۲۳/۲۱۰ × ۱ / (۱ − ۱/۲۲) | = ۴/۱۰ + ۲۳/۲۱۰ × ۱ / (۱ − ۱/۳۱۰) |
| ۷۲ | پیشانی | حصۂ اول ۔ باب اول | حصۂ اول باب پنجم |
| ۸۷ | ۲۳ | = ۳ ن ص۲ + ۳ ن ص۱ | = ۳ ن ص۲ + ۳ ن ص۱ |
| ۹۱ | ۱۸ | + ن(ن + ۱)(۲ن + ۱) / ۹ | + ن(ن + ۱)(۲ن + ۱) / ۶ |
| ۹۴ | ۱۴ | . . . . | ........................ |
| ۹۹ | ۶ | نامکمل انیار | نامکمل انبار |
| ۱۰۱ | ۱۳ | نچلی تہ | نچلی تہ |
| ۱۰۷ | ۱۳ | = (۳/۲۵ × ۲ + ۴/۲۵) | = (۳/۲۵ × ۲ + ۴/۲۵) |
| ۱۱۰ | ۱۰ | اکٹھا | اکھٹا |
| ۱۱۳ | ۵ | √(۲ل + ۱)(ل − ۳) | {√(۲ل + ۱)(ل − ۳)} |
| ۱۲۹ | پیشانی | باب نہم | باب ہشتم |
| ” | ۴ | (۲ + ۳√۸ − ۱) / (۶ + ۸√ − ۱) | (۲ + ۳√۶ − ۱) / (۶ + ۸√ − ۱) |
| ” | ۱۳ | سہ، سہ۲ | سہ، سہ۲ |
| ” | ۱۴و۱۷ | سہ۵ | سہ۵ |
| ۱۳۰ | پیشانی | باب نہم | باب ہشتم |
| ” | ۴ | ثابت کروکہ | ثابت کروکہ |
| ۱۳۸ | ۵ | ب ل۲ ـ ج ل۲ | ب ل۲ ـ ج ل۳ |
| ۱۴۰ | ۲ | + ۴(۲ل۳ ـ ۶ل | + ۴(۲ل۲ ـ ۶ل |
| ۱۴۴ | ۱۷ | (و ل + ب)−۳ | (و ل + ب)−۳ |
| ۱۴۹ | ۱۶ | ((ل + م)۲ ـ ۴ م ن) / ۲(ل ـ ن) | ((ل + م)۲ ـ ۴ م ن) / ۲(ل ـ ن) |
| ۱۵۶ | ۲ | مساوات درجہ دم | مساوات درجہ دوم |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۱۷۳ | ۵ | ل = ± ۳ √(۳/۱۷) ، ∓ √(۱ - ۲۱/۱۷) | ل = ± ۳ √(۳/۱۷) ، ∓ √(- ۴/۱۷) |
| ۱۷۷ و ۱۷۸ و ۱۷۹ | پیشانی | باب یازدہم | باب دہم |
| ۱۸۰ و | ۴ | رکھا جایے | رکھا جائے |
| ۱۸۱ | ۲۳ | بنایے جائیں | بنائے جائیں |
| ۱۹۳ | ۱۰ | ج۲۵/۲۲ = ج۲۰ ۲۵-۲۲ | ن/۲۲۲۵ = ج/۲۵۲۵ -۲۲ |
| ۱۹۴ | ۱۸ | ن - ۱ ج ر - ۱ | ن - ۱ ج ر - ۱ |
| ۲۰۳ | ۱۸ | نیزا کی | نیز انکی |
| ۲۰۴ | ۲۲ | چار آدیوں کے | چار آدمیوں کے |
| ۲۳۵ | ۱۸ | ارتفارم | ارتفام |
| ۲۴۵ | ۱۹ | ل۱۹ | ل۱۶ |
| ۲۵۲ | ۱۶ و ۱۷ | ق ر + ۲۲ | ق ر + ۱ |
| ۲۵۴ | ۴ | = ۳^۹ | = ۳^۹ |
| ″ | ۱۲ | ج۱ - ج۲ | ج۱ + ج۲ |
| ″ | ۱۳ | اجتماعوں | اجتماعوں |
| ۲۵۷ | ۸ | (۱ - ۱/۳۱۰)^۷ | (۱ - ۱/۳۱۰)^۷ |
| ۲۷۰ | ۲۰ | چھوئی | چھوٹی |

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۲۷۱ | ۱۳ | ۱۷۷ تا ۱۸ | ۱۷۷ تا ۱۸۰ |
| ۲۷۴ | ۲ و ۳ و ۹ | ا لا ا > ا | ا ل ا > ا' |
| ۲۷۵ | ۱۱ | ا لا ا > ا | ا ل ا > ا' |
| ۲۸۹ | ۲ | ۱/۳۷ | ۱/۳ |
| ″ | ۱۶ | ۳۳۳۳۱-۰ -ء | ۳۳۳۳۱۰ ء- |
| ۲۹۰ | ۱۲ | (۲ل + ۵ا)^۲ | (۲ل + ۵ا)^۱۲ |
| ″ | ۱۴ | (۳ل^۲ + ۴ا^۳) | (۳ل^۲ + ۴ا^۳) |
| ″ | ۱۸ | (۶۳۰)^-۳/۴ | (۶۳۰)^-۳/۴ |
| ۳۰۲ | ۱۳ | ج^۳ ؤ | ج^۳ د |
| ۳۳۱ و ۳۳۲ و ۳۳۳ و ۳۳۴ و ۳۳۵ | پیشانی | باب شانزدہم | باب ہفدہم |
| ۳۳۴ | ۱۳ | و = ۰۰۰۰۲۸۰ | و = ۰۰۰۰۲۸۱۷۲ |
| ۳۴۱ | ۱۷ | = ن^۳/... | = ن^۳/ن |
| ۳۴۳ | ۱۴ | ثابت کرو کہ و | ثابت کرو کہ و |
| ۳۶۳ | ۱۴ | (۱ + √۴) | (۱ ∓ √۳) |
| ۳۶۳ | ۳ | اور ل = ؛ + ب √۷ | اور ل = ؛ ∓ ب √۷ |
| | | Algebrical | Algebraical |